

ORSAY
Série A
N° d'ordre 314

Inscrit aux archives originales
du Centre de Documentation
C.N.R.S. sous le N°
AD 2171

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES MATHÉMATIQUES

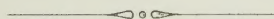
PAR

Dimitri FOTIADI



1^{re} THÈSE : CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES GRAPHS DE FEYNMAN

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Soutenues le 10 Février 1968 devant la Commission d'examen

MM. J. LERAY Président

B. MALGRANGE

R. THOM

} Examinateurs



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41554024_0007

ORSAY
Série A
N° d'ordre 314

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES D'ORSAY

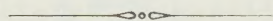
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS - SCIENCES MATHÉMATIQUES

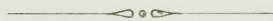
PAR

Dimitri FOTIADI



1^{re} THÈSE : CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DES GRAPHS DE FEYNMAN

2^e THÈSE : PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ



Soutenues le 10 Février 1968 devant la Commission d'examen

MM. J. LERAY Président

B. MALGRANGE

R. THOM

}
Examineurs

REMERCIEMENTS

J'exprime ma grande gratitude au Corps du Génie Maritime, en particulier à Messieurs les Ingénieurs de l'Artillerie Navale, A. MALANDAIN et C. BRACHET, pour m'avoir donné la possibilité de mettre le cap sur la recherche, puis à Messieurs les Directeurs Centraux pour m'avoir prodigué celle de l'y maintenir.

Je remercie vivement le Professeur Louis MICHEL du risque qu'il prit alors de patronner cette reconversion, puis de l'enseignement, de l'amitié et du soutien dont il n'a cessé de me combler depuis.

Je suis hautement reconnaissant envers Monsieur le Professeur Jean LERAY de toute la précieuse attention qu'il a consacrée à ce travail, de l'encouragement, des discussions et des conseils qu'il m'a accordés, et je le remercie d'avoir accepté d'être le président et le rapporteur du Jury de Thèse.

Je remercie le Professeur Bernard MALGRANGE du si judicieux choix qu'il a bien voulu faire pour le deuxième sujet.

Je remercie profondément le Professeur René THOM qui m'a depuis longtemps guidé, éclairé, conseillé, soutenu avec tant de patience.

Je remercie le promoteur du sujet, Marcel FROISSART, avec qui j'ai eu de très nombreuses discussions, d'abord à Princeton avec Raymond STORA, puis à Saclay où s'est joint Frédéric PHAM dont les fructueuses suggestions m'ont, encore récemment, bien souvent tiré d'embarras et dont l'aide est inappréciable.

Je ne saurais oublier, tant pour son soutien moral que pour d'utiles remarques, l'équipe naissante des Centres de Mathématiques et de Physique Théorique de l'Ecole Polytechnique : G. FUCHS, P. RENOUARD, R. SENEOR, A. CHENCINER, J.P. DELALE, F. LAUDENBACH et LE DUNG TRANG.

Enfin mes derniers remerciements, mais non les moins chaleureux, vont à Jean LASCOUX dont la légendaire universalité a été si efficace à mon égard.

T A B L E D E S M A T I E R E S

N O T A T I O N S	- 10
H I S T O I R E D ' U N E I N T R O D U C T I O N	- 9
I D E O G R A M M E	0
C H A P I T R E I	
TYPE STANDARD D'UNE INTEGRALE LA FONCTION ANALYTIQUE ASSOCIEE	1
C H A P I T R E II	
GRAPHES ET INTEGRALES DE FEYNMAN	8
0 - Introduction	9
I - Définitions générales concernant les graphes	10
II - Intégrale de Feynman attachée à un graphe, mise sous forme d'intégrale multiple	15
C H A P I T R E III	
ISOTOPIE	29
0 - Introduction	30
I - Isotopie dans les variétés d'ambiance	57
II - Les cinq problèmes centraux	64
III - Le théorème d'isotopie	65
C H A P I T R E IV	
LES THEOREMES DE DECOMPOSITION	81
I - Le lemme (3) d'évanouissement	82
II - Décomposition de la cohomologie compacte d'espaces topologiques	85
III - Décomposition de l'homologie compacte de variétés topologiques, différentiables ou analytiques	89

C H A P I T R E V

SOLUTION PARTIELLE DE NOTRE PROBLEME N° 4

$\pi_1(B(E, t_o) ; t_o)$ OPERANT SUR $H(E(t_o))$

FORMULE DE PICARD-LEFSCHETZ-LERAY 96

- I - Localisation dans la base 97
- II - Localisation à certains ouverts W de la fibre Z 98
- III - Formule de Picard-Lefschetz-Leray 104

C H A P I T R E VI

LES DIAGRAMMES DE FEYNMAN A UNE SEULE BOUCLE 111

- I - Description 112
- II - L'intégrale multiple génératrice 114
- III - La mise sous forme d'une intégrale de type standard 115
- IV - Isotopie et surface de Landau 125
- V - Calcul de l'homologie de la fibre générique $\tilde{E}_o$ de $\tilde{E}_G$ 131
- VI - Relations linéaires entre les diverses parties
absorptives 135
- VII - Action du groupe d'opérateurs $\pi_1(T-L ; t_o)$ sur
l'homologie de la fibre $\tilde{E}_o$ en t_o de $\tilde{E}_G$
Application de la formule de Picard-Lefschetz
Règles de Cutkosky 140
- VIII - Cas explicite du graphe carré 143

C H A P I T R E VII

SUPPORT SINGULIER DES GRAPHS A PLUSIEURS BOUCLES 158

- I - Discussion du choix d'une méthode 159
- II - Résumé des résultats d'Hironaka 173
- III - Comment utiliser les résultats d'Hironaka 174
- IV - L'exemple du graphe $\square$ 180

C H A P I T R E VIII

ESSAY DE LIBERATION EXPLICITE DE LA VARIETE

D'INTEGRATION D'UN GRAPHE QUELCONQUE 188

- I - Recherche des mauvais points d'un graphe G 189
- II - Premiers éclatements généraux 193
- III - Pour mémoire : $B = 1$. Réalisation dans le cas
d'une boucle 202
Rappel et notations de calcul différentiel 203b
- IV - $B = 2$. Réalisation dans le cas de deux boucles 204

A P P E N D I C E A

HOMOTOPIE DE $\mathbb{C}^n$ - L OU L EST ALGEBRIQUE FERME	A.1
I - Décomposition de L	A.2
II - Homotopie locale en $y \in L$ de $T - L : \pi_1(N(y)-L, t_0)$	A.2
III - Description de l'homotopie globale de $T - L$	A.6

A P P E N D I C E B

DUALITE PAR INTERSECTION PONCTUELLE	
RESIDUS DE J. LERAY	B.1

A P P E N D I C E C

DESCRIPTION D'UNE METHODE D'ETUDE DU PROBLEME N° 5	
LE PROBLEME DE LA RELEVANCE	C.1

A P P E N D I C E D

SPHERES COMPLEXES. PARTIE REELLE D'UNE VARIETE ANALYTIQUE COMPLEXE	D.1
--	-----

A P P E N D I C E E

RESULTATS D'HIRONAKA	
EXISTENCE D'UNE DESINGULARISATION	E.1
I - Le théorème 1 d'Hironaka	E.2
II - Eclatement	E.3
III - Relation entre l'éclatement et le théorème de désingularisation d'Hironaka	E.11
IV - Foncteurs, module sur un foncteur, grassmannienne d'un module quasicohérent, éclatement d'un idéal sur un foncteur	E.12
V - Lien avec la géométrie : schémas et foncteurs	E.19

A P P E N D I C E F

PRESENTATION CATEGORIQUE DES GRAPHS	F.1
I - La catégorie des doubles flèches d'ensembles pointés	F.2
II - Graphique : lignes internes et lignes externes	F.6
III - Contracté partiel, graphe relatif	F.7
IV - Catégorie des graphes abstraits	F.9
V - Une construction canonique	F.12
VI - La catégorie des graphes	F.15
VII - Objets géométriques associés à un graphe (Rappel et complément)	F.16

N O T A T I O N S

- C grande lettre soulignée, désigne une CATEGORIE
- q petite lettre soulignée désigne un QUADRIVECTEUR
- q.r = $q_0 r_0 + q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3$
- β petite lettre bisoulignée désigne une MATRICE 4 x 4
- q̄ petite lettre surlignée désigne un HEXAVECTEUR $\neq 0$
ou encore un point dans un $\bar{P}^5$:
- q̄.r̄ = $q_0 r_0 + q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3 - \frac{1}{2}(q_4 r_5 + q_5 r_4)$
- q̄.r̄ = q.r - $\frac{1}{2}(q_4 r_5 + q_5 r_4)$
- E = [$s_0 \subset s_1 \subset Y \rightarrow T$] OBJET d'une certaine catégorie
- $\left. \begin{array}{l} E_G \\ \bar{E}_G \\ \tilde{E}_G \end{array} \right\}$ Divers objets attachés à un graphe G
- $H_*^F(E \cap W)$, Homologie de $E \cap W$ à support fermés
- $H_*^F(E \cap \underline{W})$, Homologie de $E \cap W$ à supports fermés dans W

Si $M \subset Y \supset H$ sont des fermés dans Y

si $f : \tilde{Y} \rightarrow Y$ est un morphisme d'ensembles algébriques qui soit
bi-analytique sur $f^{-1}(Y - M)$ et tel que $f^{-1}(M)$ est de codimension
un dans $\tilde{Y}$

alors* $\left\{ \begin{array}{l} \tilde{H} = f^{-1}(H) \\ \text{et } \bar{H} = \text{la fermeture } \overline{f^{-1}(H - M \cap H)} \text{ dans } \tilde{Y} . \end{array} \right.$

M une réunion de sous ensembles $M_j \subset Y, j \in \beta$

alors $\bigcap_{j \in \beta} M_j$ et $\bigcup_{j \in \beta} M_j$

:

*Voir aussi appendice E, §II.

H I S T O I R E

D ' U N E

I N T R O D U C T I O N

Ce travail trouve son coup d'envoi à l'Université de Princeton en octobre 1961 lorsque Marcel Froissart me persuada d'axer l'intérêt de mon initiation à la topologie algébrique que professait J. Milnor, sur la détermination de l'obstruction homologique au prolongement analytique des fonctions définies par les intégrales de Feynman.

Nos connaissances concernant les variétés, l'homotopie et les fonctions de plusieurs variables complexes se complétaient. Et nous étions bien conscients qu'un certain groupe d'homotopie opérait sur les valeurs en un point de notre fonction multiforme, et ce par l'intermédiaire de son action sur un certain groupe d'homologie dans lequel devrait être prise la chaîne d'intégration.

La détermination de ces groupes était à faire. Il était clair que, du moins dans le cas le plus simple, celui d'un diagramme à une boucle, la variation des chaînes d'intégration après action du groupe d'homotopie était une chaîne fermée ne rencontrant pas la surface polaire de l'intégrand.

Dès lors, se posait le calcul de l'homologie du complémentaire d'une réunion de quadriques et, plus généralement, d'une réunion de variétés dans un espace affine complexe.

Marcel Froissart était bien persuadé de la décomposition de cette homologie en celle de chacune des variétés, puis celle décalée d'un cran de leurs intersections deux à deux etc..., et ne trouvait de contre exemples à cela que lorsqu'il n'y avait pas position générale. Son argument était déjà essentiellement celui d'envoyer successivement chaque surface à l'infini bien que la notion d'isotopie n'ait pas encore été dégagée.

J. Milnor ne fut qu'à moitié convaincu par ces arguments ; cependant, quelques jours après, il m'indiquait dans la bibliothèque de Fine Hall que c'était du côté homologie qu'il fallait chercher à montrer que l'homomorphisme de restriction d'une variété affine à son intersection avec une autre serait nul dans le cas de position générale.

Il m'engageait à poser la question à Solomon Lefschetz qui nous accueillit de façon charmante mais ne surmonta que très lentement sa méfiance vis-à-vis d'arguments de physiciens.

Il devenait nécessaire de définir dans quelle homologie la chaîne d'intégration devait être considérée comme un cycle pour que l'intégrale ne dépende que de sa classe. C'est évidemment celle du complémentaire de la variété polaire dans l'espace de la variable d'intégration ; ce n'est pas l'homologie ordinaire, mais l'homologie à la fois relative et dans une famille de support.

Adopter ce point de vue nécessitait de travailler toujours avec une intégrale généralisée. Il s'avère préférable de travailler avec des intégrales ordinaires, donc d'avoir une chaîne compacte d'intégration ; ceci est possible dans notre problème et fut réalisé en compactifiant la chaîne puis l'espace d'intégration, grâce principalement à une inversion géométrique transformant le 4-plan réel d'intégration en la partie réelle d'une 4-sphère complexe affine puis projective.

Cette méthode présentait l'avantage (dans le cas d'une boucle) de donner, en position générale, la compactifiée de la surface polaire.

Le calcul de l'homologie concernant les graphes à deux boucles n'était pas fait, mais nous avions cependant une présentation de l'espace comme un fibré en quadriques à fibres exceptionnelles, et c'était la suite spectrale de J. Leray qu'il faudrait utiliser.

C'est bien cette voie que, plus tard, Federbuch suivit dans le calcul qu'il eut le courage de faire.

En 1962, Louis Michel, Professeur à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, me met en contact avec Jean Lascoux qui s'occupait aussi des intégrales de Feynman.

Travaillant avec une représentation intégrale différente, celle des paramètres " α " introduits par le même Feynman, il avait pu appliquer la théorie de Leray pour décrire la ramification des fonctions multiformes qui nous occupait.

Le désavantage des formules de ramification dans la représentation " α " qui se déduisaient directement du travail de Leray était qu'elles ne s'interprétaient pas facilement en termes de diagrammes.

Par contre, les relations d'unitarité et d'unitarité généralisée (dites de Cutkosky) s'exprimaient dans l'espace des quadri-vecteurs, ou espace des " k ", de nature plus géométrique.

Il nous apparut que les notions introduites par Leray s'appliquaient aussi aux problèmes que nous nous posions dans cet espace des " k ". D'une part, dans le cas simple d'un pincement quadratique, l'action du groupe d'homotopie, "la ramification de l'intégrale", était décrite en terme de "cycle évanouissant", notion qui remonte à Poincaré et Lefschetz et qui est la bonne traduction homologique de ce que les physiciens appelaient "le pincement" du cycle d'intégration par les singularités de l'intégrand. La formule de Picard-Lefschetz expliquait "les relations d'unitarité". D'autre part, la notion de cobord de Leray était la forme naturelle pour exprimer le théorème de décomposition de Froissart.

Mais la théorie de Leray ne s'appliquait pas directement au cas considéré par nous.

Dans l'espace des k , la variété polaire de l'intégrand est une union de sous-variétés de codimension 1. Il était facile de reconnaître que les variétés de "Landau" des physiciens correspon-daient aux valeurs des paramètres pour lesquelles ces sous-variétés n'étaient pas en position générale. Il restait à obtenir pour ce cas des formules aussi explicites que celles de Leray pour le cas d'une seule variété, avec une singularité quadratique.

C'est ce que nous faisons avec F. Pham qui, sur le conseil de M. Froissart, est venu travailler avec nous.

Examinant les différents ingrédients de la théorie de Leray, nous en dégageons d'abord le théorème de "dualité" par intersection" qui conduit -par la tenacité de F. Pham (il l'étendra avec succès au cas où l'intégrand est une fonction multiforme d'un certain

type)- à la généralisation du théorème de Picard-Lefschetz-Leray, ensuite, le théorème d'isotopie finalement mis au point sous des hypothèses très générales (champs de vecteurs lipchitzsiens et notion de sous-fibré localement trivial).

Mais il faut ouvrir une parenthèse : grâce à Louis Michel, nous rencontrons à l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques R. Thom (1963). Il nous initie à la théorie de la stratification des ensembles analytiques, que développe parallèlement H. Whitney, et aux deux puissants théorèmes d'isotopie qu'il a pu en déduire. Ce sont ses méthodes qui me permettent la mise au point du théorème d'isotopie.

L'aboutissement de cette étape de nos recherches sera l'article de Topology, Vol. 4, p. 159, 1965. Les développements que ce travail suscitera parmi les physiciens sont reflétés dans le livre "Homology and Feynman diagrams" de R. Hwa et V.L. Teplitz, Benjamin 1966.

Mais il était possible d'aller plus loin. Sous la forme que préférerait Thom, les variétés de Landau apparaissent comme le contour apparent d'une certaine projection. R. Thom avait donné une théorie générale de la classification des "singularités d'une application différentiable" dans son article des Annales de l'Institut Fourier.

Ce fut F. Pham qui alla le plus loin dans cette direction. Dans sa thèse, se restreignant au cas des valeurs réelles des quadri-vecteurs (ce que les physiciens appellent la région "physique"), il étudie les singularités correspondant au symbole S_1 de R. Thom ainsi que leur composition.

Pour préciser l'ordre et la structure de ces équations, J. Lascoux utilise une variante de la suite spectrale d'une application de Leray, due à un élève de celui-ci, I. Fary.

La construction de cette désingularisation pour des graphes de plus en plus compliqués, c'est-à-dire de "leur forme normale standard" (ou type standard strict), mène naturellement à l'établissement d'une théorie des graphes sous forme d'une catégorie et l'étude d'un objet qui se présente sous la forme d'une somme amalgamée au-dessus d'un graphe commence par celle de ses constituants. F. Pham présente dans sa thèse un autre aspect de cette théorie.

Dans notre travail, le problème de la relevance d'une variété de ramification n'est qu'ébauché : cette notion répond à la définition 5 (x) (p. 38). L'homotopie du complément du support singulier agit sur l'homologie de la fibre. Mais, lorsqu'on restreint l'étude à une section R de l'espace des paramètres (par exemple R est la région physique), on diminue le sous-ensemble du groupe d'homotopie engendré ainsi par le cycle d'intégration.

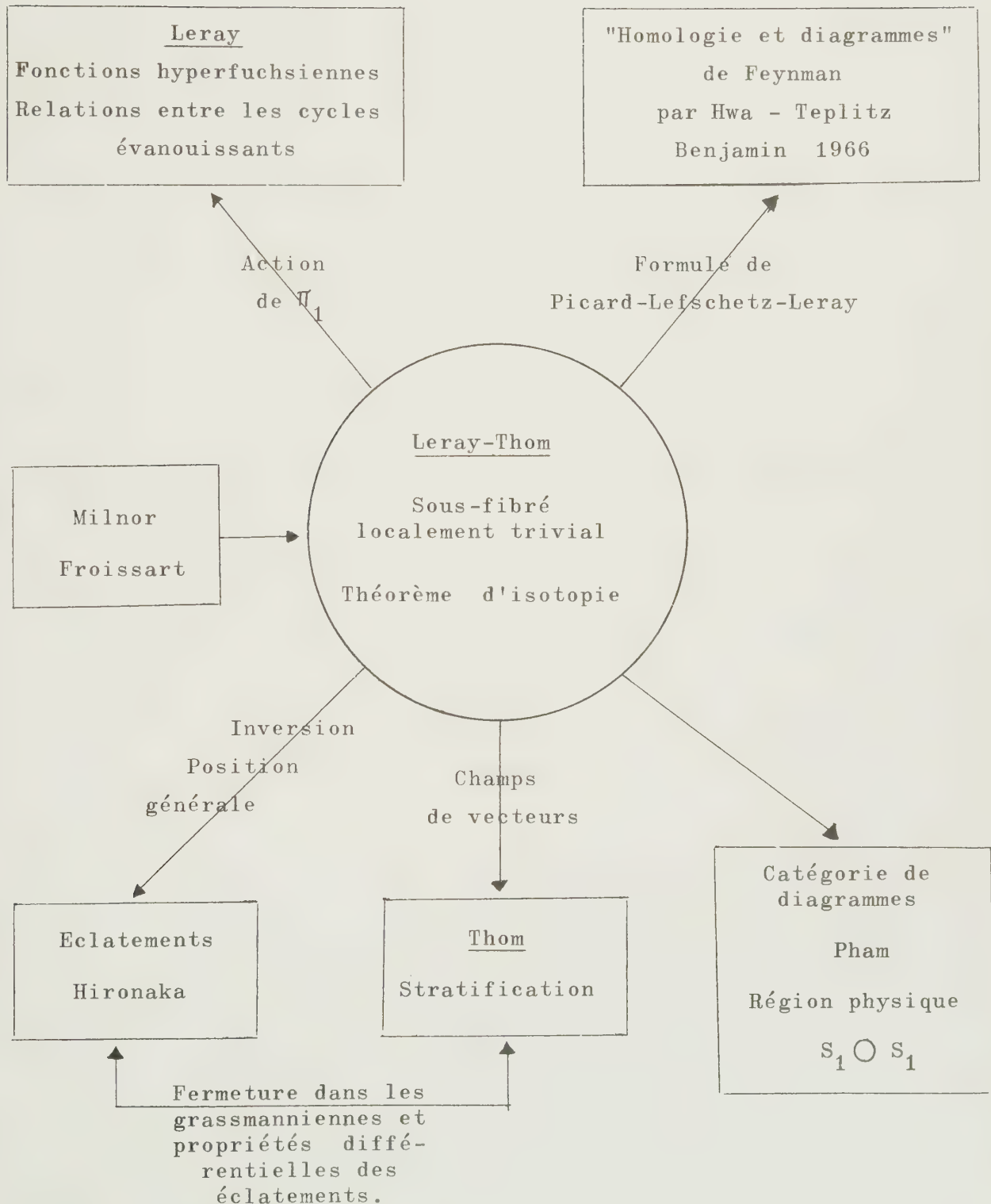
Si maintenant un chemin fermé laisse ponctuellement fixe ce sous-ensemble, la branche correspondante du support singulier n'est en fait pas singulière et donc irrélèvente.

On obtient un système de générateurs pour le groupe fondamental du complémentaire de l'ensemble de ramification en introduisant un lacet élémentaire par "composante" de cet ensemble.

Mais ces dernières composantes ne se coupent pas transversalement, et sont au contraire tangentes en général.

Il y a donc le problème de décrire les relations entre ces générateurs.

Avec le problème de décrire le changement d'homologie pour une singularité générale (et non seulement le cas quadratique non dégénéré), ce sont là des questions difficiles qu'il faut sans doute aborder dans le cadre de la théorie des Schémas de Grothendieck. Elles sont (ou seront) des chapitres des E. G. A.



C H A P I T R E I

T Y P E S T A N D A R D D ' U N E I N T E G R A L E

L A F O N C T I O N A N A L Y T I Q U E A S S O C I E E

Définition 1

On dit qu'une intégrale (1) $\int_{\Gamma} \frac{\omega(t_0)}{s(t_0)} dt$ est du type standard si les conditions (a), (b), (c) suivantes sont vérifiées :

(a) L'ensemble $\{S(t)\} = \{z \in Z \mid s(z, t) = 0\}$ est un sous-ensemble analytique topologiquement fermé d'une variété analytique complexe Z^n (de dimension complexe n) et dépend analytiquement d'un paramètre $t \in T$ variant dans une variété analytique complexe T .

$$\text{i.e. } S = \{(z, t) \in Z \times T \mid s(z, t) = 0\}$$

est un ensemble analytique fermé de $Z \times T$.

(b) $\omega(t)$ est une n -forme analytique régulière sur Z dépendant holomorphiquement du même paramètre $t \in T$.

(c) Γ_0^n est un cycle compact représentant d'une classe de l'homologie relative (usuelle, à coefficients dans $\mathbb{C}$) $H_n^{\mathbb{C}}(Z - S(t_0), D - S(t_0))$ de dimension n de la variété analytique $Z - S(t_0)$ modulo le sous-ensemble analytique topologiquement fermé $D - S(t_0) = D - (D \cap S(t_0))$ où D est un sous-ensemble analytique de S topologiquement fermé et que nous supposons fixe pour simplifier.

Théorème 1

- (1) Lorsque les conditions (a) (b) et (c) sont satisfaites, l'intégrale définit le germe en t_0 d'une fonction analytique.
- (2) Cette fonction peut-être analytiquement prolongé le long de tout chemin $\overline{t_0 t_1}$ qui est bon pour Γ_0 (relativement à S et D), (cette notion sera précisée), et sa valeur en $t \in \overline{t_0 t_1}$ est de la forme

$$\int_{\Gamma(t)} \frac{\omega(t)}{\bar{s}(t)}$$

où $\Gamma(t)$ est le représentant d'une classe convenable d'homologie relative $(\Gamma(t)) \in H_n^c(Z - S(t), D - S(t))$.

Corollaire

Cette fonction peut être analytiquement prolongée le long de tout chemin de ce que l'on définira plus loin comme étant la composante $B(t_0, \mathfrak{s}_D, Z \times T) \subset T$ d'isotopie Z -ambiante de t_0 pour $\mathfrak{s}_D = \mathfrak{s} \cup (D \times T) \subset Z \times T$ où $\mathfrak{s} = \{(z, t) \in Z \times T \mid s(z, t) = 0\} \subset Z \times T$.

Définition 1bis

- La collection $E = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}_D \subset Z \times T \rightarrow T)$ s'appelle l'OBJET GEOMETRIQUE ASSOCIE à l'intégrale de type standard et $E_0 = (S(t_0) \subset S(t_0) \cup D \subset Z \rightarrow t_0)$ est la FIBRE de E en t_0 .

- Tandis que la collection $(\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \subset Z \times T \rightarrow T)$ est l'objet associé à l'intégrant. (Que la condition (c) soit ou non vérifiée).

Définition 1ter

On dit qu'une intégrale est de type standard strict 1°/ si elle est de type standard et 2°/ si l'objet géométrique associé $E = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}_D \subset X \times T \rightarrow T)$ est algébrique propre et à croisement normaux, ie si T, X, S_D sont algébriques, si X est compact et si $\mathfrak{s}_D \subset X \times T$ est une réunion de sous variétés fermées et en position générale.

Preuve du corollaire

Nous verrons que tout chemin situé dans B est bon pour toute classe de $H_n^c(Z - S(t_0), D - S(t_0))$.]

Preuve du théorème

- (1) La forme ω est analytique et de la dimension de Z , c'est donc une forme fermée dans Z .

D'autre part $S(t_0)$ est un ensemble analytique fermé de Z , donc la forme $\omega(t_0)/s(t_0)$ est fermée dans la variété analytique $Z - S(t_0)$. De plus, $D - S(t_0)$ est un sous-ensemble analytique de $Z - S(t_0)$ de codimension supérieure ou égale à 1, donc la restriction de cette forme $\omega(t_0)/s(t_0)$ à $D - S(t_0)$ est nulle.

Donc, d'après la formule de Stokes, l'intégrale dépend seulement de la classe de Γ_0^n dans l'homologie relative $H_n^c(Z - S(t_0), D - S(t_0))$.

- (1') Γ_0^n est compact, $S(t)$ est fermé, $\omega(t)/s(t)$ est analytique au point t_0 , aussi peut-on ϕ -différencier par rapport au paramètre sous le signe somme à t_0 . L'intégrale définit donc le germe au point $t_0 \in T$ d'une fonction analytique au voisinage de t_0 .

Définition 2

$\theta \mapsto \alpha(\theta) \in \widehat{t_0 t_1} \subset T$ est un chemin dans T "bon pour Γ_0 ", si on peut lui associer une déformation continue (Cf. définition 3 qui suit) le long de $\widehat{t_0 t_1}$

$$\Gamma_0 \rightarrow \Gamma_{\alpha\theta} \subset (Z - S(\alpha(\theta)), D - S(\alpha(\theta)))$$

(de l'image d'un représentant) de la classe du cycle relatif Γ_0 .

- (2) Alors $S(\alpha(\theta))$ étant fermé dans Z pour tout $\theta \in [0,1]$, une telle déformation continue de la classe Γ le long de $\widehat{t_0 t_1}$ pourra, en raison de la compacité de Γ_0 à $t = t_0$, être remplacée par une

variation saccadée $(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p)$, portée par $\overline{t_0 t_1}$, du cycle Γ_0 .

On obtient ainsi un prolongement analytique le long de $\overline{t_0 t_1}$ du germe défini en t_0 par l'intégrale, et la valeur en t_1 de ce prolongement est

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\omega(t_1)}{\bar{s}(\bar{t}_1)} \quad \quad \quad]]$$

Remarques

- (1) La fonction obtenue par l'intégration est une fonction analytique multiforme dans T se ramifiant autour de $L = T - B(t_0, s_D, Z \times T)$
- (2) C'est par soucis de simplicité que nous avons choisi la définition ci-dessus pour la forme standard d'une intégrale : elle nous suffira pour les graphes de Feynman.
- (3) Parmi les variantes possibles surimposables à cette définition, citons
 - a) L'algèbricité de s , D , Z et T (qui entraînera alors celle de L)*
 - b) La non-observation des égalités :

$$\dim_{\mathbb{R}} \Gamma = \text{degré}_Z \omega = \dim_{\mathbb{C}} Z = n = (1 + \dim_{\mathbb{C}} S(t))$$
 - c) La non-uniformité* de la forme ω , qui pourrait admettre un support singulier de ramification, pourvu que la branche intégrée soit uniforme sur le cycle Γ_0 tout entier.
- (4) La notion de déformation continue (par rapport au paramètre t) d'une classe de l'homologie relative de $H_n^{\mathbb{C}}(Z - S(t), D - S(t))$ est évidente, lourde à mettre en forme, et peut-être formulée comme suit.

Définition 3

Précisons d'abord la notion de variation saccadée. Une varia-

* Cf. (Chapitre 7), les résultats de N. Nilsson - J. Leray.

tion saccadée $(\Gamma_0, \Gamma_1, \dots, \Gamma_p)$ portée par le chemin $\widehat{t_0 t_p}$ du cycle Γ , de la valeur Γ_0 en t_0 à la valeur Γ_p en t_p consiste à

1°) choisir une suite finie croissante de points

$$0 = \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_p = 1 \text{ de l'intervalle } [0, 1] = I$$

2°) Interpoler en chaque point $t_i = \alpha(\theta_i)$ correspondant de l'image $\widehat{t_0 t_p}$ du chemin $\alpha = I \rightarrow T$, un cycle relatif Γ_i représentant une classe $h_i \in H_n^c(Z - S(t_i), D - S(t_i))$, de telle sorte que ce Γ_i représente toujours une classe de $H_n^c(Z - S(t), D - S(t))$ pour tout $t = \alpha\theta$ et pour tout $\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$.

Soit $h'_i \in H_n^c(Z - S(t_{i+1}), D - S(t_{i+1}))$ la classe représentée ainsi par Γ_i pour la valeur $t = t_{i+1} = \alpha(\theta_{i+1})$ succédant t_i .

3°) Imposer l'égalité $h_{i+1} = h'_i$ pour $i = 0, \dots, p-1$.

On dit qu'une telle variation saccadée du cycle portée par $\widehat{t_0 t_1}$ définit une déformation continue de sa classe le long de $\widehat{t_0 t_1}$.

(5) Soit $R \subset T$ un sous-ensemble connexe par arc et fermé de T , et désignons par $B(\Gamma_0, t_0, R) \subset R$ le sous-ensemble (dont nous supposons l'existence et l'unicité) ouvert dans R , maximal pour la propriété :

tout chemin de T issu de t_0 d'image dans $B(\Gamma_0, t_0, R)$ est bon pour Γ_0 .

Alors, il se peut que $B(\Gamma_0, t_0, T) = B(\Gamma'_0, t_0, T)$ mais que

$$B(\Gamma_0, t_0, M) \neq B(\Gamma'_0, t_0, M).$$

De plus, en général on a l'inclusion stricte :

$$B(\Gamma_o, t_o, T) \cap M \subsetneq B(\Gamma_o, t_o, M).$$

L'étude de $B(\Gamma_o, t_o, M)$ est importante en physique et nous reviendrons à cette question.

- - - - -

C H A P I T R E II

G R A P H E S E T I N T E G R A L E S D E F E Y N M A N

0 - INTRODUCTION

I - LES DEFINITIONS GENERALES CONCERNANT LES GRAPHS

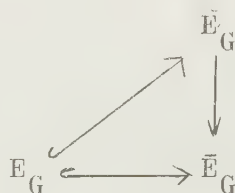
II - VALEUR AU BORD ET LA MISE SOUS FORME D'INTEGRALE MULTIPLE

0 - INTRODUCTION

A chaque graphe G correspond un intégrand ω_G donc un objet géométrique associé E_G .

L'intégrand ω_G sera celui de l'intégrale de Feynman d'abord présentée sous forme d'intégrales successives, puis d'intégrale multiple, ce qui constitue le présent chapitre.

Plus tard nous mettrons l'intégrale sous la forme d'une intégrale de type standard dont nous étudierons l'objet géométrique associé $\tilde{E}_G$. Pour arriver à cet objet, nous utiliserons un objet géométrique intermédiaire $\bar{E}_G$. Les relations entre ces objets sont



où les deux inclusions sont denses et où la troisième flèche est un éclatement.

I - DEFINITIONS GENERALES CONCERNANT LES GRAPHS

I.1 PRESENTATION CATEGORIQUE DES GRAPHS

Cette présentation est reportée en appendice.

I.2 DEFINITIONS ET NOTATIONS GENERALES CONCERNANT LES GRAPHS

- (i) - Un graphe G est la donnée d'un ensemble fini pointé (V, x) dits sommets du graphe
- (ii) - d'un ensemble fini L dit ensemble des lignes du graphe.
- (iii) - de deux applications de L dans (V, x) dites source et but :

$$\begin{array}{ccc} & \$ & \\ L & \xrightarrow{\quad} & (V, x) \\ & \mathbb{B} & \end{array}$$

- (iv) - d'une famille de nombres (ou masses) $(m_l)_{l \in L}^2$ indexée par L
- (v) - d'une famille de quadrivecteurs (ou moments) $(r_l)_{l \in L}$ aussi indexée par L et soumise à une loi de "Conservation des moments", ie, pour tout sommet $v \in (V, x)$, la somme des quadrivecteurs entrant est égale à celle des quadrivecteurs sortants, ie

$$\sum_{\$ (l) = v} (r_l) = \sum_{\mathbb{B} (l') = v} (r_{l'}) \quad .$$

Ceci constitue le premier aspect d'un graphe G.

I.21 Moments externes, masses, matrices d'incidences.

- Les lignes aboutissant ou issues du point distingué x s'appellent lignes externes et forment l'ensemble

$$E = (\mathcal{S}^{-1}(x) \cup \mathcal{B}^{-1}(x)) \subset L.$$

- Les moments correspondant à ces lignes s'appellent moments externes et se notent $(\underline{p}_e)_{e \in E}$. On a donc $\forall e \in E \quad \underline{r}_e = \underline{p}_e$. Ces moments sont soumis à la seule* contrainte

$$\sum_{S(e)=x} \underline{p}_e = \sum_{B(e')=x} \underline{p}_{e'}$$

- Les lignes non externes, forment l'ensemble J des lignes internes ; on a donc la partition

$$L = E \cup J$$

de l'ensemble des lignes.

- Les moments correspondants, ou moments internes $(\underline{r}_j)_{j \in J} \in J$ ne sont pas arbitraires en raison des contraintes (v).

On peut cependant choisir (par un choix non unique) parmi eux une base $(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_b)$ de moments internes arbitraires (dits moments de boucle) de sorte que chaque $\underline{r}_j$ soit une combinaison linéaire à coefficients fixes pris dans $\{-1, 0, +1\}$ des vecteurs arbitraires : $\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_b$, et $(\underline{p}_e)_{e \in E}$:

$$\underline{r}_j = \tau_j^b \underline{q}_b + \sigma_j^e \underline{p}_e, \quad \forall j \in J,$$

*pour un graphe intérieurement connexe (Cf. appendice F).

Les matrices τ_j^b et σ_j^e s'appellent matrices d'incidences et sont à coefficients dans $\{-1, 0, 1\}$.

Dans la suite on intégrera d'une certaine façon sur les moments de boucles qui jouent donc le rôle de variables muettes.

On peut donc encore se représenter un graphe G sous un deuxième aspect équivalent au premier, comme la donnée :

- (i') - De son extérieur ie des quadrимoments externes $(p_e)_{e \in E}$
 et des masses externes $(m_e)_{e \in E}$
- (ii') - De sa structure interne, ie des masses internes $(m_j)_{j \in J}$
 de son ensemble de boucles $B \subset J$
 de sa matrice d'incidence : $\tau : J \times B \rightarrow \{-1, 0, 1\}$
 de sa matrice d'incidence : $\sigma : J \times E \rightarrow \{-1, 0, 1\}$

I.22 Graphe abstrait G

Lorsque la valeur des quantités indexées (masses, quadrимoments) n'est pas fixée, on dit que l'on a un graphe abstrait ; un graphe abstrait est caractérisé par la donnée de

$$(E, B \subset J, \tau \text{ et } \sigma.) = G$$

I.23 Graphe en un point donné $G(m), G(m, p), G(m, p, q)$.

Lorsque l'on considère les masses comme des constantes, le graphe se symbolise par $G(m)$.

Si, de plus, on fixe les moments externes $\underline{p}$, puis éventuellement les moments des boucles $\underline{q}$, on écrit : $G(\underline{m}, \underline{p})$, $G(\underline{m}, \underline{p}, \underline{q})$.

I.24 L'espace d'intégration Z_G , l'espace des paramètres T_G du graphe G .

Les quantités indexées se rangent en deux camps :

La variable d'intégration $z = (\underline{q}_b)_{b \in B} \in \mathcal{C}^{4B} = Z_G$ qui sera muette,

Le paramètre $t = ((\underline{p}_e)_{e \in E}, (\underline{m}_l^2)_{l \in L}) \in T_G$.

Nous poserons $\underline{\underline{a}}_j^v = \sigma_j^e \underline{p}_e$, et PAR ABUS, nous considérerons parfois les quadrivecteurs $\underline{\underline{a}}_j^v$ comme des variables indépendantes.

Le paramètre sera alors

$$t = \{(\underline{\underline{a}}_j)_{j \in J}, (\underline{m}_l^2)_{l \in L}\} \in T_G = \mathcal{C}^{4J+L}$$

[On a profité de ce changement pour faire la transformation

$$\underline{\text{Chech}} : \mathcal{C}^4 \rightarrow \mathcal{C}^4, \underline{r} = (r_0, \vec{r}) \mapsto \underline{\underline{r}}^v = (-ir_0, \vec{r}),$$

dont l'inverse est la transformation :

$$\underline{\text{Tilde}} : \mathcal{C}^4 \leftarrow \mathcal{C}^4, \underline{p} = (p_0, \vec{p}) \mapsto \underline{\underline{p}}^v = (ip_0, \vec{p}). \quad]$$

I.25 Point physique initial

C'est un point $t\varphi = (\underline{m}, \underline{a})$ qui correspond à des valeurs réelles physiques et précises pour les moments, externes et les masses.

I.3 PROPAGATEURS, QUADRIQUES, SURFACE POLAIRE, FIBRE POLAIRE

ASSOCIES A UN GRAPHE G

A chaque ligne interne $j \in J$ d'un graphe G est associé

le polynôme (ou propagateur) :

$$Q_{j\varepsilon} = (\tau_j^b q_b + \sigma_j^e \tilde{p}_e)^2 + m_j^2 + i\varepsilon \quad \text{c'est-à-dire :}$$

$$Q_{j\varepsilon} = (\tau_j^1 q_1 + \dots + \tau_j^b q_b + a_j)^2 + m_j^2 + i\varepsilon$$

où $\tau_j^b \in \{-1, 0, 1\}$ est la matrice d'incidence τ ,

où q_b et a_j sont les quadrivecteurs de boucles et de paramètres,

où le carré q^2 de $q = (q_0, \vec{q}) \in \mathcal{C}^4$ est le carré Euclidien $q^2 = q_0^2 + \vec{q}^2$.

A chaque propagateur $Q_{j\varepsilon}$ est attachée la quadrique (en général dégénérée en cylindre ou en cône) $\mathfrak{s}^j$ de ses zéros dans l'espace affine produit

$$Z_G \times T_G = \mathcal{C}^{4B} \times \mathcal{C}^{4J+L}$$

Ces quadriques $\mathfrak{s}^j$ forment les composantes irréductibles de ce que l'on appelle la surface polaire

$$\mathfrak{s} = (\cup \mathfrak{s}^j)_{j \in J} \subset Z_G \times T_G$$

associé au graphe G .

On désigne par $S(t)$ la section de $\mathfrak{s}$ par la fibre dans $Z_G \times T_G$ de $t \in T_G$, autrement dit

$$S(t) = \mathfrak{s} \cap (Z_G \times \{t\}) \subset Z_G \times T_G$$

$S(t)$ s'appelle la fibre polaire de G en $t \in T_G$.

I.4 INTEGRANT ω_G , ASSOCIE A UN GRAPHE G

ω_G est lié au deuxième aspect du graphe G :

Soit $|B|$ le nombre de boucles de base de G , alors ω_G est la $4|B|$ -forme

$$\omega_G = \frac{\pi d^4 \underline{q}_b}{\pi Q_{j\varepsilon}} \cdot \frac{d^4 \underline{q}_1 \wedge \dots \wedge d^4 \underline{q}_B}{Q_{1\varepsilon} \dots Q_{J\varepsilon}}$$

sur $Z_G \times T_G$

où le produit au dénominateur court sur les lignes internes,

et où, pour $\underline{q} = (q_0, \vec{q}) \in \mathcal{C}^4$, $d^4 \underline{q}$ désigne la 4-forme habituelle

$$d^4 \underline{q} = dq_0 \wedge d^3 \vec{q} = dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3.$$

1.5 Premier objet géométrique E_G associé au graphe G

C'est l'objet géométrique E_G associé à l'intégrant ω_G
(cf. chapitre I définition 1 bis) :

$$E_G = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \subset Z_G \times T_G \rightarrow T_G)$$

dont la fibre t_0 est :

$$E_0 = (S(t_0) \subset S(t_0) \subset Z_G \times \{t_0\} \rightarrow t_0)$$

II - INTEGRALE DE FEYNMAN ATTACHEE A UN GRAPHE,

----- MISE SOUS FORME D'INTEGRALE MULTIPLE -----

II. 1 RESUME DES PROPRIETES

- "L'intégrale" de Feynman correspondant à un graphe G donné est présentée comme limite d'intégrale itérée $[G, \underline{i}, R, \varepsilon]$, elle-même limite d'intégrale multiple $[G, \underline{\beta}, R, \varepsilon]$.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G, \underline{i}, R, \varepsilon] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\underline{\beta} \rightarrow \underline{i}} [G, \underline{\beta}, R, \varepsilon].$$

- L'espace des paramètres est initialement le produit des hyperboloïdes (ou cônes) réels de masse des particules externes : $\Phi_G(m)$

On l'agrandit en deux étapes :

- toutes les masses restent réelles mais deviennent variables, y compris les masses internes : Φ_G
c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$
- les moments externes deviennent complexes ainsi que les masses internes ou externes : T_G c'est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

- Nous noterons par $T_{G(m)}$ le prolongement complexe de $\Phi_{G(m)}$ dans T_G .

- On a donc les inclusions : $\Phi_{G(m)} \subset \Phi_G \subset T_G$
 $\quad \quad \quad \cap \quad \cup$
 $\quad \quad \quad T_{G(m)}$

Notons que $\Phi_{G(m)}$ n'est une variété non singulière que si aucune des masses externes n'est nulle.

La "fonction" de Feynman du graphe G à masses fixes sera une distribution $\mathfrak{F}_{G(m)}$ portée par $\Phi_{G(m)}$.

La "fonction" de Feynman du graphe G à masses variables sera une distribution $\mathfrak{F}_G$ portée par Φ_G .

Ces distributions apparaissent comme la limite lorsque ε tend vers zéro, de la trace $\Phi_{G(m)}$ ou Φ_G , d'une famille (indexée par $\varepsilon > 0$) de fonctions analytiques sur T_G , chacune holomorphe et uniforme dans tout un voisinage de Φ_G et dont la dépendance en ε est holomorphe.

- $\mathfrak{U}_G$ et $\mathfrak{U}_{G(m)}$ apparaissent (en raison de cette holomorphic en ε) comme des valeurs au bord de fonction analytique.
- De plus, lorsqu'aucune des masses internes du graphe n'est nulle, $\mathfrak{U}_G$ apparaît localement comme la valeur au bord d'une fonction analytique dans T_G et holomorphe et uniforme dans un ouvert dont le bord est Φ_G et contient tout $\Phi_{G(m)}$.

Ainsi $\mathfrak{U}_{G(m)}$ apparaît aussi bien comme la restriction à $\Phi_{G(m)}$ de la valeur au bord $\mathfrak{U}_G$ d'une fonction T_G , que comme la valeur au bord de la restriction à $T_{G(m)}$ de cette fonction.

Cette fonction génératrice est définie par l'intégrale $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, 0]$ que nous allons décrire.

II.2 ETUDE DE LA FONCTION GENERATRICE

II.21 La notation

$$\underline{\beta} \mathbb{R}^4, \underline{\beta} \mathbb{R}_T, \underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)}, \underline{\beta} \mathbb{R}_Z, \underline{i}$$

- Soit $\mathcal{C}^4$ l'espace numérique complexe de dimension 4 ;
- Soit $\mathbb{R}^4 \subset \mathcal{C}^4$ sa partie réelle, c'est un 4 plan sur $\mathbb{R}$;
- Soit $\underline{\beta}$ une matrice 4×4 complexe, inversible ;
- Nous nous en servons pour faire PIVOTER $\mathbb{R}^4$ dans $\mathcal{C}^4$, autrement dit on désigne par

$$\underline{\beta} \mathbb{R}^4 \subset \mathcal{C}^4$$

le 4-plan sur $\mathbb{R}$ transformé géométrique de $\mathbb{R}^4$ par $\underline{\beta}$.

C'est un sous-ensemble de $\mathcal{C}^4$.

La notation est abusive en ce sens que l'on devrait utiliser la description grassmannienne.

- Soit $\mathbb{R}_T \subset T_G$ la partie réelle de l'espace des paramètres
 Soit $t = (\underline{a}_j, m_j^2) \in T_G$, alors on désigne par $\underline{\beta} \mathbb{R}_T \subset T_G$ le $\mathbb{R}$ -sous-espace de T_G :

$$\underline{\beta} \mathbb{R}_T = \{t = (\underline{a}_j, m_j^2) \mid \underline{a}_j \in \underline{\beta} \mathbb{R}^4, m_j \text{ réel}\} \subset T_G$$

- Soit $\mathbb{R}_{T(m)} \subset T_{G(m)}$ la partie réelle de l'espace des paramètres à masses fixées (à la valeur $m = (m_j)$, non forcément réelle),
 $t = ((\underline{a}_j)) \in T_{G(m)}$, alors on désigne par $\underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)}$ le sous espace de $T_{G(m)}$:

$$\underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)} = \{t = (\underline{a}_j, m_j^2) \mid \underline{a}_j \in \underline{\beta} \mathbb{R}^4, (m_j) = m\}$$

- Soit $\mathbb{R}_Z \subset Z_G$ la partie réelle de l'espace d'intégration de G ,
 alors on désigne par $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z \subset Z_G$ le $\mathbb{R}$ -sous espace de Z_G défini par

$$\underline{\beta} \mathbb{R}_Z = \{z = (q_b)_{b \in B} \mid q_b \in \underline{\beta} \mathbb{R}^4\}$$

- Enfin $\underline{i}$ désigne la matrice $\underline{\beta}$ particulière : $\underline{i} = \begin{pmatrix} \sqrt{-1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

- Remarque, les points physiques sont tous dans le sous-espace

$$\underline{i} \mathbb{R}_T(G) \subset T_G.$$

- Remarque : ce qui fera tout marcher, mais qui limite la portée de l'opération, est que nous faisons la même transformation $\underline{\beta}$ sur tous les quadrivecteurs, préservant ainsi leurs superpositions linéaires.

II.22 Le symbole $[G, \beta \mathbb{R}, \varepsilon]$

Ce symbole désigne INDIFFEREMMENT

- l'intégrale

$$[G, \beta \mathbb{R}, \varepsilon] : \int_{\omega_G} \int_{\omega_G} \int_{(\beta \mathbb{R}^4)_a \times \dots \times (\beta \mathbb{R}^4)_b} \beta \mathbb{R}_Z(\theta)$$

(où $\omega_G = \frac{\pi d^4 q_b}{\pi q_j \varepsilon}$. déjà défini, est l'intégrand du graphe G).

- où la fonction, uniforme, non continue, NON PARTOUT DEFINIE sur l'espace des paramètres, dont la valeur en $t \in T_G$ est donnée par l'intégration à contours RIGIDES précédente ; cette intégration devant être considérée soit comme globale (si l'intégrale est absolument convergente)
soit comme intégrale itérée effectuée successivement sur chacune des $4b$ coordonnées prises dans un ordre prescrit (lorsque cette dernière opération a un sens).

II.23 Le domaine de définition : absolu, simple.

Le sous-ensemble $D [G, \beta \mathbb{R}, \varepsilon] \subset T_G$ formé des $t \in T_G$ pour lesquels le symbole $[G, \beta \mathbb{R}, \varepsilon]$ a ainsi un sens, s'appelle son domaine de définition.

Le point $t \in T_G$ n'est en général pas dans le domaine de définition de $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, \varepsilon]$ si l'intersection, $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z \cap S(t) \neq \emptyset$, du plan $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z$ et de la fibre polaire $S(t)$ de G en $t \in T_G$ n'est pas vide.

Le domaine de définition comprend deux parties :

Le domaine absolu D_A , dans lequel l'intégrale multiple converge globalement, ie est absolument convergente.

Le domaine simple D_S , dans lequel l'intégrale multiple n'est peut-être pas définie, mais l'intégrale itérée, effectuée successivement coordonnée par coordonnée, a un sens.

Proposition 1

- (a) Si la matrice d'incidence τ est convenable
(dans un sens évident mais que nous ne préciserons pas)
- (b) Si $\underline{\beta}$ est tel que la restriction à $\underline{\beta} \mathbb{R}^4 \subset \mathbb{C}^4$ de la forme quadratique, $\underline{q}^2 = q_0^2 + \vec{q}^2$ soit définie (ie si le 4-plan $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$ n'admet pas de droite isotrope pour la forme $\underline{r}^2$)
- (c) Si $\underline{\beta}$ est tel que $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z \cap S(t)$ soit vide pour un $t \in \underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)}$
(donc pour tout $t \in \underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)} \subset T_{G(m)}$)

[respectivement :

- (c') Si $\underline{\beta}$ est tel que pour tout (m) réel il existe un $t \in \underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)}$ tel que $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z \cap S(t)$ soit vide (il en sera alors ainsi pour tout $t \in \underline{\beta} \mathbb{R}_T$)]

Alors,

- (i) $\underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)}$ (resp : $\underline{\beta} \mathbb{R}_T$) appartient au domaine absolu D_A de $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, \varepsilon]$,
- (ii) $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, \varepsilon]$ est définie, holomorphe et uniforme dans tout un voisinage complexe de $\underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)} \subset T_{G(m)}$ (resp. $\underline{\beta} \mathbb{R}_T \subset T_G$).

Preuve

(i) Cette première partie est quasiment évidente puisque, d'après (c) ou (c') la forme ω_G est définie en tout point de la variété linéaire d'intégration et d'après (a) et (b) la valeur absolue de ω_G est intégrable.

Comme l'assertion (a) de la proposition 3 qui suivra ci-dessous peut sembler en contradiction avec l'assertion (i) que nous discutons à présent, nous donnons l'esquisse d'une preuve (par récurrence sur le nombre de boucles de base) qu'il ne nous a pas paru opportun de formaliser à l'extrême et qui est basée sur l'emploi d'une majoration très grossière.

1°) Auparavant montrons que l'on peut se ramener au cas où la matrice $\beta = \Pi$ est l'identité.

En effet

$\beta \mathbb{R}^4 = \{ \underline{q} \in \mathcal{C}^4 \mid \underline{q} = \beta \underline{r} \text{ où } \underline{r} = (r_0, r_1, r_2, r_3) \text{ est réel} \}$, et nous pouvons prendre ce $\underline{r}$ pour coordonnées réelles sur $\beta \mathbb{R}_Z$ puisque β est inversible ; de même β étant un automorphisme de $\mathcal{C}^4$, conserve (à un multiplicateur non nul près) la forme $d^4 \underline{q}$, autrement dit cette forme du $d^4 \underline{q}$ induit sur $\beta \mathbb{R}^4$ un multiple non nul de la 4-forme réelle canonique $d^4 \underline{r}$ sur $\mathbb{R}^4$.

Interprétons l'hypothèse (b) :

La forme quadratique $\underline{q}^2$ sur $\mathcal{C}^4$ induit sur $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$ une forme quadratique $\underline{q}^2|_{\underline{\beta} \mathbb{R}^4}$ à valeur complexe. Dire que cette dernière est définie, c'est dire qu'elle ne s'annule en aucun point de la sphère de $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$, et il en est de même de la fonction $|\underline{q}^2|$ valeur absolue de $\underline{q}^2$; mais cette dernière est une fonction sur $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$ positive, homogène et de degré deux; et dire qu'elle ne s'annule pas sur la sphère unité, c'est dire qu'elle est équivalente à la distance euclidienne. Autrement dit, il existe $c_1 > 0$ et $c_2 > 0$ tels que, sur $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$ on ait :

$$c_2 \underline{r}^2 > |\underline{q}^2| > c_1 \underline{r}^2$$

où $\underline{r}^2 = r_0^2 + r_1^2 + r_2^2 + r_3^2$ et $\underline{r} \in \mathbb{R}^4$ est notre système de coordonnées déjà choisi pour $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$.

On peut encore dire : si A et B sont les parties réelles et imaginaires de la restriction à $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$ de $\underline{q}^2$, A et B sont des formes quadratiques réelles sur $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$ et de plus on $|A| + |B| \geq |\underline{q}^2| \geq \sup(|A|, |B|)$, et dire que sur $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$, $|\underline{q}^2|$ ne s'annule qu'à l'origine, c'est dire que les cônes isotropes des formes quadratiques A et B ne se coupent qu'à l'origine. D'où la même conclusion.

Interprétons l'hypothèse (c) (resp (c')).

L'extrémité du quadrivecteur (somme dans $\mathcal{C}^4$)

$$(\tau_j^b \underline{q}_b + \underline{a}_j) \in \mathcal{C}^4$$

décrit le 4-plan affine $\underline{a}_j + \underline{\beta} \mathbb{R}^4 \subset \mathcal{C}^4$ lorsque $\underline{z} = (\underline{q}_b) \in \underline{\beta} \mathbb{R}_Z^4$.

Ce lieu est donc confondu avec $\underline{\beta} \mathbb{R}^4$, et donc indépendant de t, quand ce dernier varie lui-même dans $\underline{\beta} \mathbb{R}_T^4$, puisqu'alors $\underline{a}_j \in \underline{\beta} \mathbb{R}^4$. Dire

que $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z \cap S(t)$ est vide pour $t = ((a_j), m_j) \in \underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)}$, c'est dire que pour cette valeur de t , chaque polynome $Q_{j\varepsilon}(t, z)$ ne s'annule jamais quand $z = (q_b)$ décrit $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z$.

Mais $Q_{j\varepsilon}$ a la forme particulière :

$$Q_{j\varepsilon} = (\tau_j^b q_b + \underline{a}_j')^2 + m_j^2 + i\varepsilon,$$

donc, en vertu de la remarque qui précède, $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z \cap S(t)$ est vide pour tout $t \in \underline{\beta} \mathbb{R}_{T(m)}$. Pour achever de démontrer que l'on peut se ramener au cas où $\underline{\beta}$ est la matrice identique, il suffit de remarquer que ce qui précède montre que sur un tel $\underline{\beta} \mathbb{R}_Z$ la valeur absolue $|Q_{j\varepsilon}(t, z)|$ est équivalente à la fonction $(\tau_j^b r_b + \underline{a}_j')^2 + m_j^2 + \varepsilon$, où $r_b \in \mathbb{R}^4$, $\underline{a}_j \in \mathbb{R}^4$, $q_b = \underline{\beta} r_b$ et $\underline{a}_j' = \underline{\beta} \underline{a}_j$, (on a supposé m_j réel pour simplifier).

2°) Démontrons (i) pour $\underline{\beta} = \mathbb{I}$: autrement dit démontrons par récurrence sur le nombre de boucles que l'intégrale $[G, \mathbb{R}, \varepsilon]$ est absolument convergente lorsque le paramètre t est réel (ie $t \in \mathbb{R}_T$). Remarquons qu'alors l'intégrand est égal à sa valeur absolue (après la modification mineure $i\varepsilon \mapsto \varepsilon^2$). Il suffit donc de montrer que l'intégrale calculée comme intégrale itérée converge : ce qui rend possible l'intégration boucle après boucle.

Première étape : démarrage de la récurrence.

On suppose que le graphe n'a qu'une seule boucle : (et plus de trois lignes internes),

alors l'intégrale $[G, \mathbb{R}, \varepsilon]$ converge absolument lorsque le paramètre t se trouve dans $\mathbb{R}_T$. Elle admet une majorante dont la dépendance en

$\underline{a}_1 \in \mathbb{R}^4$ est de l'ordre de $1/(\|\underline{a}_1\| + 1)$ (ie varie en raison inverse de la distance à l'origine).

En effet ce graphe étant à une seule boucle, l'intégrale est :

$$[G, \mathbb{R}, \varepsilon] = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 \underline{r}}{Q_{1\varepsilon} \cdot Q_{2\varepsilon} \cdot Q_{3\varepsilon} \cdots Q_{p\varepsilon}}$$

qui admet pour majorante un multiple de

$$\int_1^\infty \frac{|\underline{r}|^3 d|\underline{r}|}{(|\underline{r}| + |\underline{a}_1|)^2 \cdot |\underline{r}|^2 \cdots |\underline{r}|^2} = \int_1^\infty \frac{dx}{(x + |\underline{a}_1|)^2 x^{2p-1}}$$

elle-même majorée par

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x + |\underline{a}_1|)^2} = \frac{1}{\|\underline{a}_1\| + 1}$$

Deuxième étape :

On suppose que pour tous les graphes (à τ convenable) à moins de $|B|$ boucles l'intégrale $[G, \mathbb{R}, \varepsilon]$ converge absolument et a une majorante en $1/\|\underline{a}_j\| + 1$ par rapport à chaque paramètre $\underline{a}_j$ dont la ligne j n'appartient qu'à une boucle ; montrons qu'alors il en est de même de tout graphe (à τ convenable) ayant $|B|$ boucles.

En effet, par l'hypothèse de récurrence, on peut déjà intégrer la valeur absolue sur les $|B| - 1$ premières boucles, il ne reste plus qu'à intégrer sur la dernière boucle une intégrale qui est de la forme :

$$\int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 \underline{r}}{Q_{1\varepsilon} \cdots Q_{p\varepsilon} (\|\underline{r}\| + 1)^s \pi (\|\underline{a}_k\| + 1)}$$

où les $Q_{j\epsilon}$ ne concernent que la variable de dernière boucle $\underline{r}$ où $\pi(\|a_k\|) + 1$ provient des lignes appartenant à une seule des boucles précédentes et n'appartenant pas à la dernière boucle, où $(\|\underline{r}\| + 1)^s$ provient des lignes appartenant à une seule des boucles précédentes et appartenant aussi à la dernière boucle. La même majoration que dans la première étape s'applique alors. Nous arrêterons là ce raisonnement bien qu'il soit incomplet puisque la dernière boucle peut avoir une ligne en commun avec plus qu'une autre des boucles de base.

La partie (i) est donc démontrée.]]

Preuve :

(ii) D'après (i) on peut dériver sous le signe somme, or l'intégrand est uniforme et holomorphe en t au voisinage dans tout un voisinage complexe de $\underline{\beta} \mathbb{R}_T \subset T_G$; l'intégration définit donc en chaque point $t \in \underline{\beta} \mathbb{R}_T$ un germe de fonction holomorphe, mais ces germes se prolongent mutuellement en une fonction holomorphe au voisinage de $\underline{\beta} \mathbb{R}_T$ puisque $\underline{\beta} \mathbb{R}_T$ est connexe ; ils se recollent même en une fonction uniforme holomorphe dans tout un voisinage $\underline{\beta} \mathbb{R}_T \subset T_G$ puisque $\underline{\beta} \mathbb{R}_T$ étant un plan est contractile. Et il est évident que cette fonction est bien $[G, \underline{\beta}, R, \epsilon]$ tel qu'il a été défini en II.22

Proposition 2

Soit $\underline{A} \subset GL(4, \mathcal{C})$ une composante connexe par arc dans le groupe linéaire de $\mathcal{C}^4$, de l'ensemble des matrices $\underline{\beta}$ qui satisfont la condition (b) et la condition (c) de la proposition 1.

Alors la réunion des $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, \epsilon]$ lorsque $\underline{\beta} \in \underline{A}$ parcourt $\underline{A}$, définit une seule et même fonction $[G, \underline{A} \mathbb{R}, \epsilon]$ holomorphe et uniforme

dans tout un voisinage complexe de la réunion correspondante $\underline{\underline{A}} \mathbb{R}_T \subset T_G$
des $(\underline{\underline{\beta}} \mathbb{R}_T)_{\underline{\underline{\beta}} \in \underline{\underline{A}}}$.

Preuve

C'est un corollaire de la proposition 1, en effet :

Dans le cas où $\varepsilon \neq 0$, la réunion $\underline{\underline{A}} \mathbb{R}_T$ de ces $\underline{\underline{\beta}} \mathbb{R}_T$ est une réunion de plan passant chacun par l'origine de T_G donc est un domaine étoilé. Mais toutes les $[G, \underline{\underline{\beta}} \mathbb{R}, \varepsilon]$ coïncident au voisinage de cette origine en raison de la connexité de $\underline{\underline{A}}$. Dans le cas où $\varepsilon = 0$, mais si chaque masse est fixée et différente de zéro, alors la réunion $\underline{\underline{A}} \mathbb{R}_T$ des $\underline{\underline{\beta}} \mathbb{R}_{T(m)}$ est une réunion de plans passant chacun par l'origine $(a_j = 0 \ \forall j)$ de $T_{G(m)}$, et le même raisonnement s'applique.]]

Remarque : Si $\varepsilon = 0$, l'uniformité à masse réelle variable n'est plus assurée que dans $\underline{\underline{A}} \mathbb{R}_T \cap T_{G(m)} \subset T_{G(m)}$.

Remarque : La composante connexe $\underline{\underline{A}}$ qui nous intéresse est celle de la matrice identité $\underline{\underline{I}}$. (Cf. Dyson, basculement des cycles).

II.34 La prescription de Feynman

$(t\varphi) \in \underline{\underline{i}} \mathbb{R}_T \subset T_G$ étant le point physique initial, la prescription de Feynman consiste à

- Calculer d'abord $[G, \underline{\underline{i}} \mathbb{R}, \varepsilon] (t\varphi)$
- puis prendre sa valeur au bord

$$[G, \underline{\underline{i}} \mathbb{R}] (t\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G, \underline{\underline{i}} \mathbb{R}, \varepsilon] (t\varphi)$$

Proposition 3 : Reduction à la valeur au bord d'une intégrale

MULTIPLE,

- (a) Le domaine absolu de définition de $[G, \underline{i} \mathbb{R}, \varepsilon]$ n'est pas tout $\underline{i} \mathbb{R}_T$
- (b) $\underline{i} \mathbb{R}_T \subset T_G$ appartient au domaine simple de définition de $[G, \underline{i} \mathbb{R}, \varepsilon]$
- (c) $\underline{i} \in \bar{\underline{A}}$ appartient à l'adhérence de la composante connexe $\underline{A}$ de l'identité (dans l'espace des matrices inversibles) de l'ensemble des $\underline{\beta}$ satisfaisant les conditions (b) et (c) de la proposition 1.
- (d) La fonction holomorphe uniforme $[G, \underline{A} \mathbb{R}, \varepsilon]$ définie dans la proposition 2 sur $\underline{A} \mathbb{R}_T$ se prolonge holomorphiquement et uniformément par $[G, \underline{i} \mathbb{R}, \varepsilon]$ sur $\underline{i} \mathbb{R}_T$.
- (e) A masses réelles FIXEES données et toutes différentes de zéro, on a pour les valeurs au bord l'égalité :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G, \underline{i} \mathbb{R}, \varepsilon] &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{\substack{\underline{\beta} \rightarrow \underline{i} \\ \underline{\beta} \in \bar{\underline{A}}}} [G, \underline{\beta} \mathbb{R}, \varepsilon] \\ &= \lim_{\substack{\underline{\beta} \rightarrow \underline{i} \\ \underline{\beta} \in \bar{\underline{A}}}} [G, \underline{\beta} \mathbb{R}, 0] \end{aligned}$$

- (f) A masses m FIXEES données, la "fonction" de Feynman du graphe G est la distribution $\mathfrak{F}_{G(m)}$ portée $\Phi_{G(m)} \subset \underline{i} \mathbb{R}_T \subset T_{G(m)}$ définie comme valeur au bord lorsque $\underline{\beta} \in \underline{A}$ tend vers $\underline{i}$, du prolongement analytique de la fonction $[G, \underline{A} \mathbb{R}, 0]$.

Corollaire de (d) :

La prescription de Feynman fournit un résultat indépendant de l'ordre choisi pour le calcul de l'intégrale itérée.

La fonction analytique associée au graphe de Feynman est maintenant définie par une intégrale MULTIPLE, à savoir $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, 0]_{\underline{\beta} \in \underline{\mathbb{A}}}$.

Preuve

(a) Si le graphe n'a qu'une seule boucle soit

$$0 = t \in \underline{i} \mathbb{R}_{T(m)} \subset T_{G(m)} \quad (\text{ie si } \forall_j a_j = 0)$$

Alors $[G, \underline{i} \mathbb{R}, \varepsilon]$ n'est pas absolument convergente en ce t . En effet : les transformations linéaires (qui sont celles de Lorentz) de $\mathcal{C}^4$ dans $\mathcal{C}^4$ qui laissent invariantes les valeurs de $Q_{j\varepsilon}$ ainsi que le $\mathbb{R}$ -sous espace vectoriel $\underline{i} \mathbb{R}^4 \subset \mathcal{C}^4$ dans lequel évolue alors la variable d'intégration $\underline{q} = (q_0, \vec{q})$, laissent aussi invariante la mesure définie par $d^4_{\underline{q}} = dq_0 \wedge d^3\vec{q}$ sur cet espace et admettent pour orbites les hyperboloïdes de Lorentz qui eux sont de mesure tridimensionnelle infinie et si l'intégrale

$$R^3 \cdot i\mathbb{R} \int \frac{d^3\vec{q} \wedge dq_0}{|Q_{1\varepsilon} \dots Q_{J\varepsilon}|}$$

avait un sens, elle serait calculable en intégrant d'abord tridimensionnellement sur ces hyperboloïdes (ce qui donne une intégrale infinie) puis unidimensionnellement sur la masse de l'hyperboloïde]].

(b) $\underline{i} \mathbb{R}_T \subset T_G$ appartient au domaine simple de définition de $[G, \underline{i} \mathbb{R}, \varepsilon]$.

En effet on a la décomposition en deux intégrales multiples

successives convergentes :

d'abord intégrer sur tous les temps, puis sur tous les vecteurs espaces.

$$\int_{\mathbb{R}_1^3 \times \dots \times \mathbb{R}_B^3} d^3\vec{q}_1 \wedge \dots \wedge d^3\vec{q}_B \int \frac{dq_{o1} \wedge \dots \wedge dq_{oB}}{\pi^{Q_j \varepsilon}}]]$$

$$i\mathbb{R}_1 \times \dots \times i\mathbb{R}_B$$

(c) En effet : le chemin $\varphi : I = [0, \pi/2] \rightarrow \bar{A}$

$$\varphi \rightarrow \begin{vmatrix} e^{i\varphi} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{vmatrix} \text{ est tout entier dans } \underline{A}$$

sauf peut-être son point final $\underline{i}$.

(d) résulte de (c) de (b) et du fait que $[G, \underline{i} \mathbb{R}, \varepsilon]$ et $[G, \underline{\varphi} \mathbb{R}, \varepsilon]$ ont même germe à l'origine $0 = t \in \underline{i} \mathbb{R}_T \cap \underline{A} \mathbb{R}_T$ lorsque φ est assez voisin de $\pi/2$.

(e) résulte de (b) (c) et (d).

(f) est une définition.

C H A P I T R E I I I

I S O T O P I E

0 - INTRODUCTION

I - ISOTOPIE DANS LES VARIETES D'AMBIANCE

II - LES CINQ PROBLEMES CENTRAUX

III - LE THEOREME D'ISOTOPIE

0 - INTRODUCTION

Tout chemin α de l'espace des paramètres qui est bon pour le cycle initial Γ_0 d'une intégrale standard, est un chemin de continuation analytique du germe initial.

A fortiori, en est-il ainsi de tout chemin bon pour tous les cycles initiaux possibles. Mais, par définition, un tel chemin est un chemin suivant lequel on peut déformer de façon continue toute classe initiale en une classe relative $(Z - S(\alpha)(\theta))$, $D - S(\alpha(\theta))$.

A fortiori, en sera-t-il ainsi si l'on peut déformer continuellement le complémentaire $(Z - S(\alpha(\theta)))$ de la variété polaire $S(\alpha(\theta))$ en le maintenant homéomorphe à soi-même ainsi que $D - S(\alpha(\theta))$. Nous sommes ainsi parvenus à la notion topologique d'isotopie ambiante qui n'est autre que celle d'une paire d'espaces topologiques fibrée (en tant que paire) au-dessus d'un même troisième.

La notion d'isotopie ambiante qui nous intéresse est assez délicate car pour être intéressante elle doit mélanger les structures topologiques, différentiables ou Lipschitziennes. Son étude fait l'objet du présent chapitre.

Faisons pour le moment abstraction des structures algébriques, analytiques, différentiables ou lipschitziennes pour ne regarder que le

problème topologique et homologique qui se présente.

Nous sommes en face de la donnée :

$$E = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T) \quad E_b, \quad \gamma_b$$

- d'un espace topologique Y (ici de la forme $Z \times T$),
- d'une application continue $Y \xrightarrow{\pi} T$ de cet espace dans un espace T de base (ici c'est la deuxième projection $Z \times T \xrightarrow{\pi} T$)
- de deux sous-espaces topologiques fermés emboîtés $\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y$ (ici $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s}$, et $\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_D = \mathfrak{s} \cup D \times T$)
- éventuellement d'un sous-espace R de T ;
- d'un point $b \in R \subset T$;
- d'un cycle relatif γ_b de la "fibre" E_b de E en b :

$$E_b = (S_{ob} \subset S_{1b} \subset Y_b \xrightarrow{\pi} \{b\})$$

et γ_b est un cycle relatif de E_b si c'est une chaîne compacte de $Y_b - S_{ob}$ qui borde dans $S_{1b} - S_{ob}$, $\gamma_b = (\emptyset \subset \partial \gamma_b \subset \gamma \rightarrow \{b\})$ (on a posé $Y_b = \pi^{-1}(b)$ et $S_{ob} = \mathfrak{s}_0 \cap Y_b$, $S_{1b} = \mathfrak{s}_1 \cap Y_b$).

Désignons par $H(E)$ la collection des groupes ou anneaux d'homologie et de cohomologie des divers objets associables à E :

$$|H(E) = (H(\mathfrak{s}_0) \rightarrow H(\mathfrak{s}_1) \rightarrow H(Y) \rightarrow H(T), H(Y - \mathfrak{s}_0, \mathfrak{s}_1 - \mathfrak{s}_0), \text{ etc...}$$

Désignons de même par

$$H(E_r), \quad H(E|B), \quad H(E|R)$$

les collections correspondantes des "restrictions" de E aux sous-espaces emboîtés $T \supset R \supset B \ni r$.

A cet emboîtement correspondent,
pour les cohomologies, des homomorphismes

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^*(E) & \longrightarrow & H^*(E|R) & \longrightarrow & H^*(E|B) & \longrightarrow & H^*(E_r) \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 H^*(T) & \longrightarrow & H^*(R) & \longrightarrow & H^*(B) & \longrightarrow & H^*(r)
 \end{array} .$$

qui donnent entre les collections des cohomologies une certaine cohésion que couronne la suite spectrale de J. Leray ;

pour les homologies, des homomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc}
 H_*(E) & \longleftarrow & H_*(E|R) & \longleftarrow & H_*(E|B) & \longleftarrow & H_*(E_r) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_*(T) & \longleftarrow & H_*(R) & \longleftarrow & H_*(B) & \longleftarrow & H_*(r)
 \end{array} .$$

Une certaine cohésion dans la réunion disjointe $\mathcal{E} = (H_*(E_t))_{t \in T}$ des homologies des fibres est donnée par notre problème.

En effet, cet ensemble somme se projette naturellement sur T :

$$\mathcal{E} = (H_*(E_t))_{t \in T} \xrightarrow{K} T ,$$

et tout notre problème consiste à trouver :

- les chemins de $R \subset T$ de source b et bons pour $(\gamma_b) \in H_*(E_b)$ (au sens du chapitre I).
- La section canonique de K de source γ_b au-dessus de chacun de ces chemins.

Force nous est de donner des noms.

Désignons par $\mathcal{E}(b, \gamma_b, R, E) \subset \mathcal{E}^I$ cet ensemble de chemins ainsi obtenus de source γ_b dans l'ensemble $\mathcal{E}$.

Désignons par $K \mathcal{E}(b, \gamma_b, R, E) \subset R^I$ l'ensemble des chemins de R de source b bons pour $(\gamma_b) \in H(E_b)$ dont ils proviennent.

Avant d'examiner comment construire $\mathcal{E}(b, \gamma_b, R, E)$ et $K \mathcal{E}(b, \gamma_b, R, E)$, insistons sur le fait qu'il n'y a aucune raison pour qu'il existe un sous espace $B \subset R$ tel que l'ensemble de chemins $K \mathcal{E}(b, \gamma_b, R, E)$ soit l'ensemble $B^I(b)$ de tous les chemins de B de source $b \in B$.

Cependant d'après le théorème de Zorn, il existera au moins un ensemble $B \subset R$ maximal pour la propriété que $B^I(b) \subset K \mathcal{E}(b, \gamma_b, R, E)$. Nous le noterons $B(b, \gamma_b, R, E)$.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un chemin $\sigma \in R^I$ appartienne à $K \mathcal{E}(b, \gamma_b, R, E)$ est (d'après le chapitre I) qu'il soit décomposable en un nombre fini de morceaux tels que chacun d'eux soit très bon pour la classe du cycle de l'extrémité du précédent : en d'autres termes si $\widehat{bb'} \subset R$ est le premier morceau, alors il y a un homéomorphisme du produit topologique $\gamma_b \times \widehat{bb'}$ dans $Y_{\widehat{bb'}} = \pi^{-1}(\widehat{bb'})$ qui envoie $\gamma_b \times \{t\}$ dans $Y_t - S_{ot}$ et $\partial \gamma_b$ dans $S_{1t} - S_{ot}$ pour tout $t \in \widehat{bb'}$.

Nous verrons que, avec des notations évidentes mais qui

seront néanmoins explicitées plus loin, ceci s'exprime en disant qu'il existe un monomorphisme $\widehat{\gamma_{bb'}} \hookrightarrow \widehat{E_{bb'}}$ (dans une certaine catégorie) au-dessus de bb' , où l'on a posé :

$$\widehat{\gamma_{bb'}} = (\emptyset \subset (\widehat{bb'} \times \partial \gamma_b) \subset (\widehat{bb'} \times \gamma_b) \xrightarrow{\pi} \widehat{bb'})$$

$$\widehat{E_{bb'}} = (\mathfrak{s}_{obb'} \subset \mathfrak{s}_{1bb'} \subset Y_{bb'} \xrightarrow{\pi} \widehat{bb'})$$

I - ISOTOPIE DANS DES VARIETES D'AMBIANCE

DIFFERENTIABLES OU ALGEBRIQUES

$$\mathfrak{F}_{\text{DIF}}^L : \underline{E}_{\text{VDIF}}^L \rightarrow \underline{\text{VDIF}}$$

DEFINITIONS DES NOTIONS

Définition (i) : VARIETE FIBREE ET FILTREE EN PROJETES.

Un QUADRUPLER $E = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$ formé d'une variété différentiable (resp. algébrique lisse) Y ;

- d'une part fibré (localement en produit de telles variétés) par une application fibrante différentiable (resp. algébrique) $\pi : Y \rightarrow T$ sur une variété différentiable (resp. algébrique lisse) T ;
- d'autre part filtrée en deux projetés, c'est-à-dite munie d'un sous espace topologique fermé (resp. d'un sous schéma fermé) $\mathfrak{s}_1$ muni lui-même d'un sous-espace topologique fermé (resp. d'un sous-schéma fermé) $\mathfrak{s}_0$;

s'appelle encore UNE VARIETE FIBREE FILTREE EN PROJETES, et si l'on veut être plus précis E s'appelle encore une variété différentiable fibrée et filtrée en deux espaces topologiques projetés.

(resp : une variété algébrique lisse fibrée et filtrée en schémas projetés)

et T s'appelle LA BASE DE E .

Définition (ii) : VARIÉTÉ EN PRODUIT FILTRÉE EN FIBRÉE TRIVIAUX

C'est le nom que prend une variété fibrée filtrée en projetés

$E = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$ lorsqu'elle est de la forme

$E = ((S_0 \subset S_1 \subset Z) \times T \xrightarrow{\pi} T).$

Autrement dit si $Y = Z \times T$ est un produit et si $\mathfrak{s}_1$ et $\mathfrak{s}_0$ sont les sous-espaces topologiques de l'espace topologique sous-jacents de Y définis

par $\mathfrak{s}_0 = \{(z, t) \in Z \times T \mid z \in S_0\}$

$\mathfrak{s}_1 = \{(z, t) \in Z \times T \mid z \in S_1\}$

où $S_0 \subset S_1 \subset Z$ sont des sous espaces topologiques fermés et emboîtés de l'espace sous-jacent à la variété Z .

Définition (0)

Un MORPHISME de tels quadruplets est le composé d'un nombre fini d'applications

$f : E = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T) \rightarrow (\mathfrak{s}'_0 \subset \mathfrak{s}'_1 \subset Y' \xrightarrow{\pi'} T') = E'$

où f est un couple $f = (f_2, f_3)$ formé

- d'une application différentiable (resp. algébrique), $f_3 : T \rightarrow T'$

- et d'une application lipschitzienne, soumise à restriction (L)

ci-dessous, $f_2 : Y \rightarrow Y'$,

telles que $\pi' \circ f_2 = \pi \circ f_3$, $\mathfrak{s}'_0 = f_2^{-1}(\mathfrak{s}'_0)$, $\mathfrak{s}'_1 = f_2^{-1}(\mathfrak{s}'_1)$.

On pose par surcroît $f_1 = f_2|_{\mathfrak{s}_1}$ et $f_0 = f_2|_{\mathfrak{s}_0}$.

Restriction (L) sur f_2 :

Il existe un recouvrement de Y :

$(Y_j \xrightarrow{\sigma_j} Y)_{j \in J}$ en variétés fibrées $\pi_j : Y_j \rightarrow T$ sur T , tel que :

π_j soit une fibration de variétés différentiables pour tout j .

σ_j soit une injection différentiable de variétés différentiable ;

$$\pi_j = \sigma_j \circ \pi ;$$

l'application composée $f_2 \circ \sigma_j : Y_j \rightarrow Y'$ soit une application

DIFFERENTIABLE pour tout j ; et enfin que la différentielle $Df_2 : \tau Y \rightarrow \tau Y'$,

(qui est définie sur la réunion $\tau \tilde{Y}$ des images par $D\sigma_j$ des fibrés tangents τY_j dans le fibré tangent τY à Y) est lipschitzienne.

Si $f = (f_2, f_3) : E \rightarrow E'$ est un morphisme, alors $\Phi^L(f) = f_3 :$

$T \rightarrow T'$ et on dit que le morphisme f est AU-DESSUS de f_3 .

Remarque : Les quadruplets E et leurs morphismes forment ainsi une CATEGORIE que l'on dénote $\underline{E}_{\underline{VDIFF}}^L$ (resp. $\underline{E}_{\underline{VAL}}^L$).

- La correspondance $E \rightarrow T = \text{base de } E$ est alors un foncteur que l'on dénote :

$$\Phi_{\underline{VDIFF}}^L : \underline{E}_{\underline{VDIFF}}^L \rightarrow \underline{VDIFF}$$

$$(\text{resp. } \Phi_{\underline{VAL}}^L : \underline{E}_{\underline{VAL}}^L \rightarrow \underline{VAL})$$

où L est en souvenir de Lipschitz.

- Les foncteurs Φ^L sont fibrants en ce sens que si $\sigma : T \rightarrow T'$ est un morphisme de variétés, et si E' est un quadruplet au-dessus de T' , alors il existe un quadruplet $E = \sigma^* E'$ au-dessus de T qui a les propriétés d'une image réciproque par σ du quadruplet E' .

- Notamment si $B \xrightarrow{\sigma} T$ est une inclusion de variétés, alors

l'image réciproque d'un quadruplet sur T s'appelle le QUADRUPLET INDUIT sur B et se note $E|B$ au lieu de τ^*E .

Remarque : Soit $f = (f_2, f_3) : E \rightarrow E'$ un morphisme au sens précédent. Soit $V : Y \rightarrow \tau Y$ est une section lipschitzienne, ce qui signifie que V est un champ lipschitzien de vecteurs. Alors si f_2 est un homéomorphisme bilipschitzien (donc a fortiori si f est un isomorphisme au sens de $\underline{E}_{VDIFF}^L$) alors Df_2 transforme V en un champ lipschitzien de vecteurs sur Y' .

En effet, en cartes locales, prenons pour distance sur τY l'expression $d[(y, v), (y_1, v_1)] = \|y - y_1\| + \|v - v_1\|$ (où la double barre est une norme de $\mathbb{R}^n$).

Dire que V est Lipschitzienne c'est dire que

$$(1) \quad \|y - y_1\| + \|v - v_1\| \leq K \|y - y_1\|$$

Dire que $D_2 f$ est lipschitzienne, c'est dire que

$$(2) \quad \|y' - y'_1\| + \|v' - v'_1\| \leq K (\|y - y_1\| + \|v - v_1\|)$$

De (1) et (2) on tire

$$(3) \quad \|y' - y'_1\| + \|v' - v'_1\| \leq C \|y - y_1\|$$

Mais si $f_2 : Y \rightarrow Y'$ $y \mapsto y'$ est un homéomorphisme, alors $y' \mapsto v' = Df_2 v$ est une section $V' : Y' \rightarrow \tau Y'$ c'est-à-dire un champ ;

Si, de plus, l'homéomorphisme inverse $g_2 : Y \leftarrow Y'$ est aussi lipschitzien

$$(4) \quad \|y - y_1\| < D \|y' - y'_1\|$$

D'où finalement

$$(5) \quad \|y' - y'_1\| + \|v' - v'_1\| < K \|y' - y'_1\|$$

qui exprime que la section V' est lipschitzienne, ie que le champ V' est lipschitzien.]]

Définition (iii) : VARIÉTÉ FIBRÉE ET FILTRÉE EN FIBRÉS

On dit qu'une variété fibrée et filtrée en projetés E est une VARIÉTÉ FIBRÉE ET FILTRÉE EN FIBRÉS, si elle est LOCALEMENT ISOMORPHE au sens de $\mathfrak{F}^L$ à une variété en produit filtrée en fibrés triviaux ; autrement dit, s'il existe un recouvrement ouvert $(T_\alpha \subset T)_{\alpha \in A}$ tel, pour tout α , le fibré induit $E_\alpha = E|_{T_\alpha}$ s'envoie par un isomorphisme g_α (de E_{VDIFF}^L situé au-dessus de l'identité de T_α) sur une variété en produit filtrée en fibrés triviaux ; autrement dit on demande que $g_\alpha = (g_{1\alpha}, g_{2\alpha} = \text{Id}_{T_\alpha})$ soit une trivialisation non seulement de Y_α mais aussi de $s_{0\alpha}$ et de $s_{1\alpha}$.

Cette simultanéité est beaucoup plus forte que de dire les restrictions $s_{0\alpha} \xrightarrow{\pi|s_{0\alpha}} T_\alpha$ et $s_{1\alpha} \xrightarrow{\pi|s_{1\alpha}} T_\alpha$ de π à $s_{0\alpha}$ et à $s_{1\alpha}$ sont des fibrations topologiques au-dessus de T_α .

Notations

Pour exprimer que $E = (s_0 \subset s_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$ est une variété fibrée filtrée en fibrés, on écrit

$$(s_0 \subset s_1 \xrightarrow{\pi} T) \overset{*}{\subset} (Y \xrightarrow{\pi} T)$$

ou

$$(s_{0\alpha} \subset s_{1\alpha} \xrightarrow{\pi} T_\alpha) \overset{**}{\underset{g_\alpha}{\subset}} (Y_\alpha \xrightarrow{\pi} T_\beta)$$

ou encore $\mathfrak{S} \overset{*}{\subset} (Y, T)$
 ou encore $\mathfrak{S} \overset{**}{\underset{\alpha}{\subset}} (Y, T)$

Une étoile signifie qu'il y a locale trivialité, deux étoiles indiquant qu'au-dessus de l'ouvert T_α il y a trivialisation par g_α .

Voici quelques définitions :

- (iv) $\alpha : D_1 \rightarrow D$ est une BASE D'ISOTOPIE, pour un objet E au-dessus de D, si l'image réciproque α^*E est une variété fibrée et filtrée en fibrés.
- (v) et (vi) une COMPOSANTE D'ISOTOPIE α , pour E et pour la base α_2 c'est une base maximale parmi les injections CONTENANT α_2
- (vii) une ISOTOPIE $\gamma : L_0 \rightarrow L_1$ de deux VARIETES FILTREES $L_0 = (S'_0 \subset S_0 \subset Z_0)$ et $L_1 = (S'_1 \subset S_1 \subset Z_1)$ est un isomorphisme (au-dessus de l'objet final), qui est réalisable comme restriction au-dessus de l'extrémité $\{I\}$ d'un isomorphisme g au-dessus du segment I de deux variétés fibrées et filtrées en fibrés, tel que la restriction de g à l'autre extrémité $\{0\} \in I$ soit l'identité.
- (xi) une ISOTOPIE Z-AMBIANTE $\gamma : (S'_0 \subset S_0 \subset Z) \rightarrow (S'_1 \subset S_1 \subset Z)$ de deux filtrations d'une même variété d'ambiance Z, est une isotopie qui est réalisable par un isomorphisme qui soit un automorphisme d'une même variété sous-jacente.

Proposition 1

Soit un quadruplet quelconque $E = (\mathfrak{s}' \subset \mathfrak{s} \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$

(autrement dit E est une variété fibrée, filtrée en PROJETES) :

- (0) Soit $B \hookrightarrow T$ une base d'isotopie pour E ,
- (1) alors tout chemin (differentiable, algébrique par morceaux etc)
 $\sigma : I = [0,1] \rightarrow B$ de B définit une classe d'isotopie de
 $E_0 = E|_{\{0\}}$ à $E_1 = E|_{\{1\}}$, qui est Z -ambiante dès que $Y = Z \times T$.
- (2) Cette classe σ ne dépend que de la classe d'homotopie dans B du chemin σ .
- (3) Cette classe σ définit une classe d'homéomorphismes de Z envoyant S_0 sur S_1 et S'_0 sur S'_1 .
- (4) Cette classe définit des isomorphismes des groupes d'homologie et de cohomologie (pour toute famille stable par elle de supports)
de E_0 et E_1 : $H(E_0) \simeq H(E_1)$ ie
 $\sigma : H(Z_0 - S'_0, S_0 - S'_0) \simeq H(Z_1 - S'_1, S_1 - S'_1)$ etc...
- (4') et ces isomorphismes sont toujours tels que $\sigma : H(\mathbf{Z}) \rightarrow H(\mathbf{Z})$ soit l'IDENTITE dès que $Y|_B$ est de la forme $Z \times T$, ie dès que l'isotopie définie par σ est Z -ambiante.
- (5) Si $B = B(b, E)$ est une base d'isotopie pour E et $\{b\} \in B$, alors le premier groupe d'homotopie de B au point b , $\pi_1(B, b)$ est un groupe d'opérateurs sur la collection $H(E_b)$ des groupes d'homologie et de cohomologie concernant la fibre E_b .]]

Remarque : Dans tout ce qui précède, les flèches "du bas" (α , r , b , etc...) appartiennent à la catégorie $D = \underline{\text{VDIFF}}$ ou $\underline{\text{VAL}}$, de sorte que D_1 , B , R sont des variétés différentiables (ou algébriques) éventuellement à bord.

Dans ce contexte, les bases d'isotopie pour un objet E forment un ensemble inductif donc les composantes d'isotopie existent mais elles ne forment pas une partition de la base T de E ; cependant la partition que l'on obtient à partir d'elles (en prenant les intersections et leurs complémentaires etc...) est ce que l'on conviendra d'appeler la stratification de la base T de E en bases d'isotopie pour E .

Notons que

- (x) Si $E = (s_0 \subset s_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$ est une variété fibrée, filtrée en projetés.

Si $R \hookrightarrow T$ est une sous variété de T à laquelle on désire limiter notre étude.

Si $t \in T \cap R$ et $E_t = (S_0 \subset S_1 \subset Z \rightarrow t)$ est la "fibre" en t ,

Si une variété à bord γ est un cycle relatif de $(Z - S_0, S_1 - S_0)$ alors l'inclusion canonique de γ dans E_t définit bien une flèche dans $\underline{E}$ au-dessus de $\{t\} \hookrightarrow R \hookrightarrow T$

$$\gamma : \Gamma = (\emptyset \subset \partial\gamma \subset \gamma \rightarrow t) \rightarrow E$$

et toute base $B \hookrightarrow R \hookrightarrow T$ très bonne pour γ et r (au sens de (x)) est telle que tout chemin (différentiable par morceau) de B issu de t définit une déformation du cycle γ dans la "fibre" de E le long de ce chemin, bien que E même restreint à B ne soit pas un $\underline{E}$ -fibré.



II - LES CINQ PROBLÈMES CENTRAUX

Les problèmes centraux que pose l'étude d'un objet $E = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \subseteq Y \xrightarrow{\pi} T)$ de notre catégorie $\underline{E}$ sont

Pb 1 : La détermination de la pseudo stratification de la base $\pi(E) = T$ en composantes d'isotopie B_i pour E :

$$T = \bigcup_{i \in I} B_i \quad (b_i, \mathfrak{s}, Y) \quad b_i \in B_i.$$

Pb 2 : Le calcul des groupes d'homologie et de cohomologie $H(S_b)$, $H(Z_b - S_b)$, $H(Z_b - S_b'', S_b - S_b')$ etc... concernant la fibre E_b de E en $b \in B$.

Pb 3 : Le calcul du groupe d'homotopie $\pi_1(B, b)$ de chacune des composantes d'isotopie de T pour E

Pb 4 : La détermination de l'action du groupe d'opérateurs $\pi_1(B, b)$ sur les groupes d'homologie et de cohomologie précédents de la fibre E_b .

Pb 5 : La détermination des composantes $B(b, \gamma_b, R)$ bonnes pour $b \in R \subseteq T$ et $\gamma_b \in H(Z_b - S_b', S_b - S_b')$.

Nous n'aurons malheureusement que des solutions partielles de ces problèmes.

III - LE THEOREME D'ISOTOPIE

(Comportement local en $\underline{E}/T$ de la propriété $\overset{*}{\subset}$)

Théorème 2

Si $E = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$ est une variété fibrée filtrée en PROJETES, telle que $\pi : Y \rightarrow T$ soit PROPRE, alors il y a équivalence entre les assertions (a) et (b) suivantes :

(a) E est une variété fibrée filtrée en FIBRÉS

(b) E admet (dans $\underline{E}_{\text{VDIFF}}^L$) un recouvrement OUVERT $E_\beta \hookrightarrow E$ par des variétés fibrées filtrées en FIBRÉS.

Autrement dit, si π est PROPRE, il y a équivalence entre

(a) $\mathfrak{s} \overset{*}{\subset} (Y, T)$

(b) Tout point y de Y admet un voisinage ouvert N , tel que

$$(\mathfrak{s} \cap N) \overset{**}{\subset} (N, \pi(N))$$

(On sait que π est ouverte).

Corollaire

Soit T une variété différentiable (resp. algébrique lisse) et X une variété différentiable (resp. algébrique lisse) COMPACTE.

Soit $\{S_i(t)\}$ une famille de sous variétés différentiables fermées (resp. algébrique lisse et fermée), qui dépendent différentiablement (algébriquement) du paramètre $t \in T$ et qui demeurent en

POSITION GENERALE lorsque t varie dans T .

$$\text{On pose} \quad \mathfrak{s} = \bigcup_{t \in T} [\bigcup S_i(t), t] \subset X \times T,$$

alors le corollaire est :

$$\mathfrak{s} \overset{*}{\subset} (X \times T, T).$$

Autrement dit

$$E = (\emptyset \subset \mathfrak{s} \subset X \times T \xrightarrow{\pi} T)$$

est une variété fibrée filtrée en FIBRÉS.

Lemme 1⁺

Soit F un champ de vecteurs sur une variété différentielle Y .
Si F est lipschitzien et est à support compact K , alors F engendre un groupe à un paramètre $\gamma(t)$ d'homéomorphismes lipschitziens de Y .

Preuve

Supposons qu'un champ de vecteurs F engendre un groupe à un paramètre $\gamma(t) : Y \rightarrow Y, y \mapsto \gamma(t, y)$ de Y ;
alors à tout point fixé $y \in Y$ correspond la courbe de Y $t \mapsto \gamma(t, y)$
et cette courbe satisfait à l'équation différentielle :
 $d\gamma(t, y)/dt = F_{\gamma(t, y)}$ avec la condition initiale $\gamma(0, y) = y$; en effet
si f est une fonction différentiable de Y , on a par définition :

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma(t, y)}{dt}(f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(t + h, y)) - f(\gamma(t, y))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\gamma(h, y')) - f(y')}{h} = F_{y'}(f) \end{aligned}$$

⁺ Comparer à : J. Milnor, Lemme (2,4).

où l'on a posé $y' = \gamma(t, y)$ et tenu compte de l'identité
 $\gamma(t + h, y) = \gamma(h, y')$.

Mais lorsque le champ F est lipschitzien, une telle équation différentielle admet localement une solution UNIQUE. Donc à tout point de Y correspond un voisinage U et un nombre $\varepsilon > 0$ tel que l'équation différentielle :

$$\frac{d\gamma(t, y)}{dt} = F_{\gamma(t, y)} \quad \gamma(0, y) = y$$

admet une solution unique pour $y \in U$ et $|t| < \varepsilon$.

Le support K du champ F est compact et peut donc être couvert par un nombre fini de tels voisinages U . Soit $\varepsilon_0 > 0$ le plus petit des nombres ε qui leur correspondent.

Pour tout point $y \notin K$ situé en dehors du support, on posera $\gamma(t, y) = y$, alors notre équation différentielle admet pour $|t| < \varepsilon_0$ et pour tout $y \in Y$, une solution unique $\gamma(t, y)$; et cette solution est une application continue du couple des variables et lipschitzienne en y .

De plus, on a $\gamma(t, s) = \gamma(t) \circ \gamma(s)$ dès que $|t|, |s|, |s + t| < \varepsilon_0$; ce qui montre qu'un tel $\gamma(t)$ est un homéomorphisme et que son inverse est lipschitzienne.

Lorsque $t \geq \varepsilon_0$, on définit $\gamma(t)$ comme suit :
on divise t par $\varepsilon_0/2$, et soit r le reste, ie $t = k.(\varepsilon_0/2) + r$ où k

est un entier positif et $|r| < \varepsilon_0/2$ on pose

$$\gamma(t) = \underbrace{\gamma(\varepsilon_0/2) \circ \dots \circ \gamma(\varepsilon_0/2)}_{k \text{ fois}} \circ \gamma(r)$$

lorsque t est négatif, on procède de même en prenant k négatif en remplaçant dans la formule $\gamma(\varepsilon_0/2)$ par $\gamma(-\varepsilon_0/2)$ et en itérant $(-k)$ fois.]]

Remarque : Le lemme peut encore s'énoncer :

si F est champ lipschitzien et à support compact de vecteurs d'une variété Y , alors F engendre un groupe γ à un paramètre d'automorphismes

$$\gamma(t) : [\emptyset \subset \emptyset \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond] \rightarrow [\emptyset \subset \emptyset \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond]$$

de l'objet $E_\emptyset = [\emptyset \subset \emptyset \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond]$ de notre catégorie $\underline{E}_{VDIFF}^L$.

Lemme 2 de superposition

Soit $\mathfrak{s} \subset Y$ un sous ensemble fermé d'une variété différentiable Y .

Soit F_1, F_2 deux champs, lipschitziens et à supports compacts, de vecteurs de Y .

Soit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma$ les groupes à un paramètre d'homéomorphismes bilipschitziens de Y , engendrés respectivement par les champs F_1, F_2 et $F = F_1 + F_2$ (ces groupes existent d'après le lemme 1).

Supposons que γ_1 et γ_2 laissent (globalement) invariant le sous ensemble $\mathfrak{s}$, alors le groupe à un paramètre γ lui aussi laisse l'ensemble $\mathfrak{s}$ globalement invariant.

Autrement dit, dans notre catégorie $\underline{E}_{VDIFF}^L$,

si les automorphismes $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ de $[\emptyset \subset \emptyset \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond] = E_{\emptyset}$ appartenant aux groupes à un paramètre γ_1 et γ_2 , engendrés par les champs lipschitziens et à supports compacts F_1 et F_2 , sont en fait des automorphismes de $[\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond] = E_{\mathfrak{s}}$, alors les automorphismes $\gamma(t)$ de $[\emptyset \subset \emptyset \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond] = E_{\emptyset}$ formant le groupe à un paramètre engendré par le champ superposé $F = F_1 + F_2$ sont aussi en fait des automorphismes de $[\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond] = E_{\mathfrak{s}}$

Preuve

Le composé $\beta(t) = \gamma_1(t) \circ \gamma_2(t)$ des automorphismes $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ de $E_{\mathfrak{s}}$ est évidemment un automorphisme de $E_{\mathfrak{s}}$, mais l'application $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \text{Aut}(E_{\mathfrak{s}})$, $t \mapsto \beta(t)$ n'est pas un groupe à un paramètre. (Car $\gamma_1(t)$ et $\gamma_2(t)$ n'ont aucune raison de commuter). Pour montrer le lemme, il suffit de démontrer la formule :

$$[L] \quad \gamma(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} [\beta(\frac{t}{n})]^n$$

où $\gamma : t \mapsto \gamma(t)$ est le groupe à un paramètre d'automorphismes de $E_{\emptyset}$ engendré par $F = F_1 + F_2$;

où $\beta(t) = \gamma_1(t) \circ \gamma_2(t)$ et

où la limite est prise au sens de la topologie UNIFORME sur l'ensemble des endomorphismes de Y .

Cette topologie est bien définie puisque Y en tant que variété paracompacte et différentiable est un espace métrique donc un espace uniforme et que $h_n = [\beta(t/n)]^n$ est l'identité en dehors d'un compact fixe.

Preuve de [L]

Puisque F_1 et F_2 sont des champs à supports compacts, il est

suffisant de démontrer la formule [L] dans le cas où Y est l'espace numérique $\mathbb{R}^q$ muni de la norme Euclidienne $\| \cdot \|$.

Montrons que la différence $\gamma(t) - [\beta(\frac{t}{n})]^n$ est de l'ordre de $1/n$; plus précisément, t étant fixé, il existe $B \geq 0$ tel que pour tout $y \in \mathbb{R}^q$ on ait $\|\gamma(t).y - [\beta(\frac{t}{n})]^n.y\| \leq \frac{1}{n} B$.

Pour cela on utilise les IDENTITES FONDAMENTALES :

$$(1) \quad \gamma(t) = [\gamma(\frac{t}{n})]^n$$

$$(2) \quad \text{et} \quad \alpha^n - \beta^n = \sum_{r=0}^{n-1} (\alpha^r \alpha \beta^{n-r+1} - \alpha^r \beta \beta^{n-r+1})$$

dans laquelle nous remplacerons α et β par $\alpha = \gamma(t/n)$ et $\beta = \beta(t/n)$.

Nous montrerons que $\alpha.y - \beta.y$ est de l'ordre de $1/n^2$, puis que $\alpha^2 \alpha \beta^{n-r+1}.y - \alpha^r \beta \beta^{n-r+1}.y$ est de l'ordre de $1/n^2$, ce qui, par les formules (1) et (2), entraînera bien que $\alpha^n.y - \beta^n.y$ est de l'ordre de $1/n$.

Le calcul, classique en théorie des équations différentielles, est le suivant :

Soit $M \geq 0$ un nombre tel que $(\|F_1(y)\| + \|F_2(y)\|) < M < +\infty$

quel que soit $y \in Y$; une telle borne uniforme existe puisque F_1 et F_2 sont à support compact et continus.

Soit $k \geq 0$ une constante de Lipschitz commune à F_1 , F_2 et $F = F_1 + F_2$.

On a l'égalité

$$\begin{aligned} \alpha.y - \beta.y &= \gamma(t/n).y - \gamma_1(t/n) \circ \gamma_2(t/n).y \\ &= \eta - \eta_2 - \eta_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{où} \quad \eta &= \gamma(t/n).y - y - t/n F(y) \\
\eta_2 &= \gamma_2(t/n).y - y - t/n F_2(y) \\
\eta_1 &= \gamma_1(t/n).y' - y' - t/n F_1(y) \\
&\text{et } y' = \gamma_2(t/n).y.
\end{aligned}$$

Mais comme F engendre γ , nous avons

$$\eta = \int_0^{t/n} [F(\gamma(\tau).y) - F(y)] d\tau$$

et

$$\gamma(\tau).y - y = \int_0^\tau F(\gamma(\theta).y) d\theta.$$

$$\begin{aligned}
\text{Donc } \|\eta\| &\leq t/n. \sup_{\tau} \|F(\gamma(\tau).y) - F(y)\| \leq t/n.k. \sup_{\tau} \|\gamma(\tau).y - y\| \\
&\leq 1/n^2. t^2.k.M.
\end{aligned}$$

On obtient de même la limitation

$$\|\eta_2\| \leq 1/n^2. t^2. k.M$$

et, en tenant compte de $\gamma_1(\tau).y' - y = \gamma_1(\tau).y' - y' + \{y' - y\}$,

$$\text{on a } \|\eta_1\| \leq 2/n^2. t^2. k.M.$$

Donc, pour tout $y \in R^P$, on a

$$\|\alpha.y - \beta.y\| \leq C/n^2; \text{ où } C = 4.t^2. k.M.$$

Maintenant posons $y'' = \beta^{n-r+1}.y$ $y_1 = \alpha.y''$ $y_2 = \beta.y''$,

alors $\|y_1 - y_2\| \leq 1/n^2.C$ d'après la formule précédente ;

$$\begin{aligned}
\text{mais } \alpha^r \alpha \beta^{n-r+1}.y - \alpha^r \beta \beta^{n-r+1}.y &= \alpha^r.y_1 - \alpha^r.y_2 = \\
&= \gamma(rt/n).y_1 - \gamma(rt/n).y_2 = v(rt/n)
\end{aligned}$$

$$\text{où } v(\theta) = \gamma(\theta).y_1 - \gamma(\theta).y_2 = y_1 - y_2 + \int_0^\theta [F(\gamma(\tau).y) - F(\gamma(\tau).y_2)] d\tau$$

La condition de Lipschitz donne $\|v(\theta)\| \leq \|y_1 - y_2\| + k \int_0^\theta \|v(\tau)\| d\tau$,
ce qui entraîne $\|v(\theta)\| \leq \|y_1 - y_2\| e^{k\theta}$.

Donc pour tout $r \in \{0, \dots, n-1\}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}^p$,

on a

$$\|\alpha^r \alpha \beta^{n-r+1} y - \alpha^r \beta \cdot \beta^{n-r+1} y\| \leq 1/n^2 B$$

$$\text{où } B = 4.t^2 . k . M . e^{kt} .$$

C'est-à-dire que l'on a bien :

$$[L] \quad \|\gamma(t) . y - [\beta(t/n)]^n . y\| \leq 1/n B \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^p$$

Le transformé par $\gamma(t)$ de tout point $y \in \mathfrak{s}$ est donc point limite dans Y d'une suite $(h_n y)$ convergente de points de $\mathfrak{s}$, donc $\gamma(t).y$ est lui-même un point de $\mathfrak{s}$ (car $\mathfrak{s}$ est fermé). Donc $\gamma(t)$ est bien un automorphisme non seulement de $E_\emptyset$ mais aussi de $E_{\mathfrak{s}} = [\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} \diamond]$ et le lemme 2 est démontré.]]

Preuve du théorème

- Implication dans le premier sens (a) $\Rightarrow$ (b)

Evidente : prendre $N = Y$.

Remarque sur la localisation. Si E est de la forme

$P = ((S_0 \subset S_1 \subset Z) \times T \xrightarrow{\pi} T)$, alors on peut prendre pour $N(z, t)$ tout produit $N_1(z) \times N_2(t)$ d'un ouvert de Z par un ouvert de T , car $P \cap N(z, t)$ reste trivial.

En fait, d'après (a), si $t = \pi(y)$ il existe un ouvert $N_2(t)$ de T et un isomorphisme $g : E|_{N_2} \rightarrow P|_{N_2}$, $y \mapsto (z, t)$, prenons pour $N(y)$ l'image inverse $N = g^{-1}(N_1(z) \times N_2(t))$, alors $g|_N : E \cap N \rightarrow P \cap N(z, t)$ est encore un isomorphisme, ie $\mathfrak{s} \cap N \xrightarrow[g|_N]{**} (N, \pi(N))$.

- Implication dans le deuxième sens $(b) \Rightarrow (a)$:

il suffit évidemment de montrer que

$t_0 \in T \Rightarrow$ Il existe un voisinage $W(t_0) \subset T$ tel que

$$(\mathfrak{s}|W) \overset{**}{\subset} (Y|W, W) \quad .$$

π étant propre, l'hypothèse (b) entraîne que $\pi^{-1}(t_0)$ admet un recouvrement fini par des ouverts N^j de Y tels que

$$(\mathfrak{s} \cap N^j) \overset{**}{\underset{g_j}{\subset}} (N^j, \pi(N^j)) \quad \text{où } j \in J \text{ fini.}$$

Les projections $\pi(N^j)$ sont des ouverts de T puisque π est ouverte. On prend pour ouvert $W(t_0)$ l'intersection (finie) de ces projections, et en vertu de la remarque précédente sur la localisation, on peut supposer que quelque soit j on a $W(t_0) = \pi(N^j)$ et que $W(t_0)$ est le cube ouvert $\overset{o}{K}_2^p$ centré à l'origine t_0 de $\mathbb{R}^p = T$ et de deux unités de longueur de côté.

Choisissons une fois pour toutes une fonction $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$, positive, différentiable, à support situé dans le cube $\overset{o}{K}_2^p$ et dont la restriction au cube unité $\overset{o}{K}_1^p$ est constante et égale à 1.

Soit $(p_j)_{j \in J}$ une partition différentiable de l'unité subordonnée au recouvrement ouvert fini N^j de la variété différentiable $Y|W$.

Soit $\underline{H}$ un champ vectoriel, constant, unitaire de direction arbitraire, de $\mathbb{R}^p$. Ce champ est différentiable ainsi que le champ $f \underline{H}$ qui est à support compact. Pour tout $j \in J$, explicitons la trivialisation partielle :

$$g_j : E \cap N^j \rightarrow P^j|W$$

où
$$P^j = ((S_0^j \subset S_1^j \subset Z^j) \times T \xrightarrow{\pi_j} T).$$

Dans la variété produit $Z^j \times T$, le champ $\pi_j^{-1}(f \underline{H})$ produit du champ nul de Z^j par le champ $f \underline{H}$ de T , est différentiable et horizontal ; puisque $\pi_j^{-1}(f \underline{H})$ est horizontal dans $Z^j \times T$, l'isomorphisme g_j^{-1} le transforme en un champ $g_j^{-1} \circ \pi_j^{-1}(f \underline{H})$ sur la variété N_j , lequel sera lipschitzien puisque $\pi_j^{-1}(f \underline{H})$ l'est.

Après multiplication par p_j , on obtient un champ $\underline{F}_j = p_j(g_j^{-1} \circ \pi_j^{-1}(f \underline{H}))$, lipschitzien sur N^j et dont le support est compact, car c'est celui de la fonction produit $p_j \times (f \circ \pi)$. Ce champ $\underline{F}_j$ s'étend, par zéro, en un champ $\underline{F}^j$ lipschitzien, à support compact, de la variété $Y|W$.

Nous appellerons $\underline{H}^j$ le champ sur $Z^j \times T$ déduit de $\underline{F}^j$ par le transport de structure que fournit l'isomorphisme g_j , autrement dit

$$\underline{H}^j = (p_j \circ g_j^{-1}) \cdot (\pi_j^{-1}(f \underline{H}))$$

$\underline{H}^j$ est un champ horizontal lipschitzien à support compact sur $Z^j \times T$.

D'après le lemme (1)

- $\underline{F}^j$ engendre un groupe à un paramètre γ^j d'homéomorphismes lipschitziens de la variété $Y|W$.
- $\underline{H}^j$ engendre un groupe à un paramètre δ^j d'homéomorphismes lipschitziens de la variété $Z^j \times W$.

De plus, par construction, on a $\delta^j \circ g_j = g_j \circ \gamma^j$.

Mais $\underline{H}^j$ est horizontal, donc δ^j est un groupe d'automorphismes de $P_j = ((S_0^j \subset S_1^j \subset Z^j) \times T \rightarrow \diamond)$, donc γ^j est un groupe d'automorphismes de $Q = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \rightarrow \diamond)$.

(Autrement dit, chaque γ^j laisse $\mathfrak{s}$ globalement invariant).

Soit $\underline{F}$ le champ vectoriel lipschitzien à support compact sur $Y|W$ défini par la superposition : $\underline{F} = \sum_{j \in J} \underline{F}^j$.

Par construction, $\underline{F}$ admet une image par $\pi : Y \rightarrow T$,
et cet image est le champ $(f \underline{H})$ sur T .

Soit γ_2 le groupe à un paramètre engendré par $\underline{F}$ et

soit γ_3 le groupe à un paramètre engendré par $(f \underline{H})$.

Alors $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3)$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de l'objet :

$$E_\emptyset = (\emptyset \subset \emptyset \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$$

Mais d'après le lemme de superposition, γ_2 est un groupe d'automorphismes de Q , donc finalement $\gamma = (\gamma_2, \gamma_3)$ est un groupe à un paramètre d'automorphismes de l'objet initial :

$$E = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$$

Particularisons maintenant le champ $\underline{H}$ en $\underline{H} = \underline{H}_p$, champ unitaire constant parallèle au dernier axe du cube unité K^p ; et identifions les décompositions canoniques du cube unité $\overset{\circ}{K}^p$ en produit de sa r dernière face par sa $p - r$ première face :

$$\overset{\circ}{K}^p = \overset{\circ}{K}^{p-1} \times \overset{\circ}{K}_1 = \dots = \overset{\circ}{K}^{p-r} \times \overset{\circ}{K}_r = \dots = \overset{\circ}{K}_p$$

où $\overset{\circ}{K}^{p-1} = \{t \in \overset{\circ}{K}^p \mid \text{la dernière coordonnée de } t \text{ est nulle}\}$
 $\overset{\circ}{K}_1 = \{\tau \in \overset{\circ}{K}^p \mid \text{seule la dernière coordonnée } \tau \text{ n'est}$
pas forcément nulle}

A partir du groupe à un paramètre $\gamma_p = (\gamma_2, \gamma_3)$ d'automorphismes de l'objet initial :

$$E = (\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$$

obtenu par la construction précédente appliquée à $\underline{H}_p$, formons dans $\underline{E}^L_{VDIFF}$, l'isomorphisme au-dessus de l'ouvert $\overset{\circ}{K}^p$ de T :

$$g_p = ((g_p)_2, (g_p)_3) : E|_{\overset{\circ}{K}^p} \rightarrow (E|_{\overset{\circ}{K}^{p-1}}) \times \overset{\circ}{K}^1$$

dont l'inverse est défini par

$$(g_p^{-1})_2 : \gamma_2(\tau, y) \mapsto (y, \tau)$$

$$(g_p^{-1})_3 : \gamma_3(\tau, \pi(y)) \mapsto (\pi(y), \tau)$$

de sorte que

$$\left(\begin{array}{l} (g_p)_2 : y \mapsto (\gamma_2(-\tau, y), \tau) \\ (g_p)_3 : \pi(y) \mapsto (\gamma_3(-\tau, \pi(y)), \tau) \end{array} \right)$$

(remarquer que le choix de $\underline{H}_p$ et le fait que $f|_{\underline{H}_p} = \underline{H}_p$ sur $\overset{\circ}{K}^p$, et l'identification $\overset{\circ}{K}^p = \overset{\circ}{K}^{p-1} \times \overset{\circ}{K}_1$ entraînent que $(g_p^{-1})_3$ est l'identité).

Réurrence

Remarquons que si les hypothèses du théorème sont valables pour E , elles le demeurent pour la restriction $(E|_{\mathbb{R}^{p-1}})$. On a donc, de même que précédemment, un isomorphisme

$$g_{p-1} : (E| \overset{\circ}{K}^{p-1}) \rightarrow (E| \overset{\circ}{K}^{p-2}) \times \overset{\circ}{K}_1 .$$

Par composition, on obtient un isomorphisme

$$g^p : (E| \overset{\circ}{K}^p) \rightarrow (E| \{0\}) \times \overset{\circ}{K}_p ,$$

explicitement défini par :

$$g^p = (g_1 \times \text{Id } \overset{\circ}{K}_{p-1}) \circ \dots \circ (g_{p-2} \times \text{Id } \overset{\circ}{K}_2) \circ (g_{p-1} \times \text{Id } \overset{\circ}{K}_1) \circ g_p$$

mais g^p se trouve au-dessus de l'identité du cube $\overset{\circ}{K}^p = \overset{\circ}{K}_p$, de plus sa source est l'objet initial E et son but est l'objet trivial $(E| \{0\}) \times \overset{\circ}{K}_p$.

Donc $E| \overset{\circ}{K}^p$ est bien isomorphe à un objet trivial et le théorème est ainsi démontré.]]

Remarques : 1) g^p peut être considéré comme un automorphisme de $E_\emptyset = (\emptyset \subset \emptyset \subset Y \xrightarrow{\pi} \overset{\circ}{K}^p)$, sa restriction à la fibre centrale $E_\emptyset| \{0\}$ est alors l'identité.

2) A chaque étape nous avons fait un choix.

Démonstration du corollaire

Soit π la projection $Y = X \times T \rightarrow T$. La dépendance différentiable en $t \in T$ signifie que pour tout point $y \in Y$ il existe un système local de coordonnées dans un voisinage π -fibré N_y^{∇} pour lequel

$$s_i = \{(x, t) | x \in S_i(t)\}$$

est l'ensemble des zéros d'une fonction $s_i(x, t)$ différentiable en (x, t) .

La POSITION GENERALE au point $x_0 \in X$ des variétés $S_i(t_0)$ signifie qu'au point $y = (x_0, t_0)$ les vecteurs gradients en X des fonctions intéressées sont linéairement indépendants ; plus précisément

$$\diamond\diamond \left\{ \begin{array}{l} \text{Soit } I_y = \{i \mid x_0 \in S_i(t_0)\} , \quad \text{alors} \\ \text{la famille des vecteurs} \\ \left(-\frac{\partial s_i}{\partial x}(x_0, t_0) \right)_{i \in I_y} \\ \text{est linéairement indépendante.} \end{array} \right.$$

La position générale dans X pour tout t signifie que $\diamond\diamond$ est valable pour tout $y \in Y$.

Comme $\mathfrak{s}_i$ est fermé dans $X \times T$, on peut choisir N_y tel que $(i \notin I_y \Rightarrow N_y \cap \mathfrak{s}_i = \emptyset)$. Alors la trivialisation dans N_y de la réunion $\mathfrak{s} = \bigcup \mathfrak{s}_i$ est réalisable par le changement suivant de coordonnées locales

$$g : \left\{ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_\mu \\ x_{\mu+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \\ t \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} s_{i_1}(x, t) \\ s_{i_2}(x, t) \\ \vdots \\ \vdots \\ s_{i_\mu}(x, t) \\ x_{\mu+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \\ t \end{array} \right.$$

$$\text{où } I_y = \{i_1, \dots, i_\mu\}, \quad \frac{D(s_{i_1}, \dots, s_{i_\mu})}{D(x_1, \dots, x_\mu)} \neq 0 \text{ dans } N_y$$

Il ne reste plus qu'à raffiner N_y de telle sorte que son image gN_y soit un produit.

La condition (b) du théorème d'isotopie est donc vérifiée, et le lemme est démontré.]]

Remarque : g est un difféomorphisme, donc on a en fait montré que l'objet $E = (\emptyset \subset \mathfrak{s} \subset X \times T \xrightarrow{\pi} T)$ est une variété fibrée filtrée en FIBRÉS non seulement dans la catégorie $\underline{E}_{\text{VDIFF}}^L$, mais dans $\underline{E}_{\text{VDIF}}^L$.

Remarque : sur les EXTENSIONS possibles du théorème d'isotopie.

- 1) Le théorème, démontré pour $\underline{E}_{\text{VDIFF}}^L$ (resp. $\underline{E}_{\text{VAL}}^L$) est évidemment encore vrai dans $\underline{E}_{\text{DIFF}}^L$.
- 2) Le théorème, démontré pour des variétés sans bord est évidemment encore vrai pour des variétés à bord.
- 3) Les deux outils principaux étaient :

- (i) le lemme de superposition qui permet de raccorder des isotopies ambiantes locales.
- (ii) la compacité de la fibre, qui permet l'application du lemme de Milnor.

- (i) Mais le premier outil s'applique encore à un objet E à FILTRATION INFINIE.

(ii) La condition de propriété de X peut être omise à condition de remplacer la condition (b) par

(b') il existe un recouvrement ouvert N_j de Y tel que

$$(\mathcal{S} \cap N_j) \overset{g_j}{\overset{**}{\subseteq}} (N_j, \pi(N_j))$$

pour tout $j \in J$ et tel que g_j soit l'identité sauf pour un nombre fini d'ouverts relativement compacts N_j .



C H A P I T R E I V

L E S T H E O R E M E S D E D E C O M P O S I T I O N

Ce chapitre fournit une réponse partielle à notre problème N°2 concernant le calcul des groupes d'homologie.

Son objet principal est l'établissement du théorème 5 dont voici une forme affaiblie :

" Si $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_p\}$ sont des sous variétés algébriques lisses de codimension (complexe) un de l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^n$,
et Si les variétés se coupent en position générale et se comportent bien à l'infini, alors l'homologie singulière à coefficients complexes du complémentaire dans $\mathbb{C}^n$ de leur réunion, se décompose en la somme directe des homologies singulières de leurs intersections une à une, deux à deux, etc... p à p.

C'est la partie (4') de la proposition (1) qui fait tout marcher.

I - LE LEMME (3) D'EVANOUISSEMENT

Soit Z un espace topologique et soit $\Sigma' \xrightarrow{i} Z$ un sous espace de Z .

Si, à tout compact K on peut associer une isotopie Z -ambian-
te σ_K de Σ' , qui envoie Σ' hors de K : $\sigma_K(\Sigma') = {}^K\Sigma' \subset (Z - K)$
alors c'est l'application nulle : $H_c^q(Z) \xrightarrow{i^*} H_c^q(\Sigma')$, que l'inclusion
 i donne par passage aux groupes de cohomologie à support compact.

Preuve

Si h est une classe quelconque de la cohomologie à support compact dans $H_c^q(Z)$, il s'agit de montrer que $i^*(h) = 0$. Soit $\omega \in h = h(\omega)$ un cocycle représentant h . ω s'annule donc en dehors d'un certain compact $K \subset \omega$. Par hypothèse il existe une isotopie Z -ambiante $\sigma_{K\omega}$ de Σ' telle que $\sigma_{K\omega}(\Sigma') = K_{\omega\Sigma'} \subset Z - K \subset \omega$.

Soit $i_{K\omega}$ l'inclusion $i_{K\omega} : K_{\omega\Sigma'} \hookrightarrow Z$.

Alors le diagramme commutatif d'applications continues

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma' & \xrightarrow{\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'}} & K_{\omega\Sigma'} \\
 i \downarrow & & \downarrow i_{K\omega} \\
 Z & \xrightarrow{\sigma_{K\omega}} & Z
 \end{array}$$

donne le diagramme commutatif de groupes de cohomologie compacte en dimension q :

$$\begin{array}{ccc}
 H_c^q(\Sigma') & \xleftarrow{(\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^*} & H_c^q(K_{\omega\Sigma'}) \\
 i^* \uparrow & & \uparrow i_{K\omega}^* \\
 H_c^q(Z) & \xleftarrow{\sigma_{K\omega}^*} & H_c^q(Z)
 \end{array}$$

dans lequel

- (a) La flèche de droite annule la classe $h(\omega)$ de ω puisque $K\omega_\Sigma$ ne coupe pas le support de ω : ie $i_{K\omega}^* h(\omega) = 0$.
- (b) Les deux flèches horizontales sont des isomorphismes car $\sigma_{K\omega}$ est une isotopie (cf. Prop. 1 ; (4)).
- (c) La flèche horizontale du bas est l'IDENTITE de $H_c^q(Z)$, car l'isotopie $\sigma_{K\omega}$ est Z-ambiante (cf. prop. 1. (4')).

On a donc

$$\begin{aligned}
 i^*(h) &= (\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^* \circ i_{K\omega}^* \circ (\sigma_{K\omega}^*)^{-1}(h) = \\
 &= (\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^* \circ i_{K\omega}^* (h) = \\
 &= (\sigma_{K\omega}|_{\Sigma'})^* (0) = 0
 \end{aligned}$$

]]

Le fait que l'isotopie soit Z-ambiante est fondamental.

Remarque : La cohomologie H_c^q à support compact dont il s'agit est à coefficients dans un faisceau constant de fibre G quelconque ; on sait qu'elle coïncide alors avec la cohomologie singulière à support compact à valeur dans G .

II - DECOMPOSITION DE LA COHOMOLOGIE COMPACTE D'ESPACES TOPOLOGIQUES

Théorème (3)

Soit Z un espace topologique paracompact, et soit $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_p$ une famille finie de sous espaces fermés de Z : $\Sigma_j \subset Z$.

Hypothèses

On suppose qu'à tout compact $K \subset Z$ et qu'à tout indice $j \in \{1, \dots, p\} = J$, on puisse associer une isotopie Z -ambiante σ_{Kj} de la famille $\{\Sigma_1, \dots, \Sigma_p\}$

(a) qui envoie Σ_j hors de K : $\sigma_{Kj}(\Sigma_j) \subset (Z - K)$

(b) qui laisse invariante Σ_i pour $i \neq j$.

Conclusion

Alors la COHOMOLOGIE singulière à support compact (à coefficients dans un corps $\mathfrak{s}$, ou dans $\mathbb{Z}$ modulo torsion) du complémentaire dans Z de la collection Σ , admet la décomposition (non canonique) suivante en somme directe :

$$\begin{aligned} H_c^q(Z - \bigcup_j \Sigma_j) &= \bigoplus_{h \in \mathcal{P}\{1, \dots, p\}} \delta^h H_c^{q-|h|}(Z \bigcap_{j \in h} \Sigma_j) \\ &= \bigoplus_{h \in \mathcal{P}\{1, \dots, p\}} H_c^{q-h}(Z \bigcap_{j \in h} \Sigma_j) \\ &= H_c^q(Z) \oplus \bigoplus_j H_c^{q-1}(\Sigma_j) \oplus \bigoplus_{i < j} H_c^{q-2}(\Sigma_i \cap \Sigma_j) \oplus \text{etc...} \end{aligned}$$

où $\mathcal{P}(J)$ est l'ensemble des parties de J

où $|h|$ est le nombre de points de $h \in \mathcal{P}(J)$,
 et où $\delta^h : H_c^{q-|h|}(Z - \bigcap_{j \in h} \Sigma_j) \rightarrow H_c^q(Z - \bigcap_{j \in h} \Sigma_j)$
 est le COBORD h -ITERE défini au cours de la preuve.

Démonstration

par recurrence sur p .

- (1) Si $p = 0$ ie si J est vide, la formule consacre simplement
 l'identité $H_c^q(Z) = H_c^q(Z)$ et on pose $\delta^\emptyset = \text{Identité}$.
 (2) Supposons vrai le théorème pour $p - 1$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } \Sigma' &= \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \dots \cup \Sigma_{p-1} \\ \Sigma &= \Sigma_p \end{aligned}$$

Alors, en employant la notation $A - B$ pour $A - (A \cap B)$, l'inclusion
 $(\Sigma - \Sigma') \hookrightarrow (Z - \Sigma')$ est fermée, et la "suite exacte d'un fermé" s'écrit
 alors :

$$i^* : H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta} H_c^q(Z - (\Sigma' \cup \Sigma)) \rightarrow H_c^q(Z - \Sigma') \xrightarrow{i^*} H_c^q(\Sigma - \Sigma').$$

Mais la flèche i^* est nulle.

En effet σ_{Kp} est une isotopie Z -ambiante qui laisse fixe Σ' et qui
 envoie Σ hors de K , desorte que sa restriction $\sigma_{Kp} \mid Z - \Sigma'$ est une
 isotopie $(Z - \Sigma')$ -ambiante qui envoie $\Sigma - \Sigma'$ hors de $K - \Sigma'$.

Mais on peut prendre pour K un compact quelconque de l'espace $Z - \Sigma'$;
 le lemme (3) d'évanouissement s'applique donc et l'on obtient la
 suite exacte :

$$(1) \quad 0 \rightarrow H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta} H_c^q(Z - (\Sigma' \cup \Sigma)) \rightarrow H_c^q(Z - \Sigma') \rightarrow 0$$

En raison de l'hypothèse sur les coefficients de la cohomologie, cette suite se scinde et donne :

$$H_c^q(Z - \Sigma' \cup \Sigma) = \delta H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \oplus H_c^q(Z - \Sigma')$$

où δ est une injection et où la décomposition n'est pas canonique.

L'hypothèse de récurrence s'applique aux deux morceaux du second nombre :

$$H_c^q(Z - \Sigma') \quad \text{et} \quad H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') ;$$

En effet, les restrictions $\sigma_{K1} | \Sigma, \dots, \sigma_{Kp-1} | \Sigma$ sont des isotopies Σ -ambiantes de la famille de $(p-1)$ membres : $\{\Sigma \cap \Sigma_i\}_{i \in \{1, \dots, p-1\}}$ de sous ensembles fermés de Σ et satisfont les hypothèses du théorème. On a donc les décompositions :

$$H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') = \bigoplus_{h_1 \in \mathcal{P}\{1, \dots, p-1\}} \delta^{h_1} H_c^{q-1-|h_1|}(\Sigma \cap_{h_1} \Sigma_i)$$

et

$$H_c^q(Z - \Sigma') = \bigoplus_{h_2 \in \mathcal{P}\{1, \dots, p-1\}} \delta^{h_2} H_c^{q-|h_2|}(Z \cap_{h_2} \Sigma_j)$$

On définit inductivement le COBORD h -ITERE par la formule $\delta^h = \delta \circ \delta^{h_1}$ pour $h = h_1 \cup \{p\}$; il suffit de remarquer qu'ici δ^h est une injection et que l'on a la partition

$$\mathcal{P}\{1, \dots, p\} = \mathcal{P}\{1, \dots, p-1\} \cup [h = \{p\} \cup h_1 \mid h_1 \in \mathcal{P}\{1, \dots, p-1\}] ;$$

pour achever la démonstration.]]

Remarque d'anticommutativité

Le fait d'étiqueter les sous espaces Σ_j par l'ensemble

$\{1, \dots, p\}$ a introduit implicitement un ordre sur l'ensemble $h \in \mathcal{P} \{1, \dots, p\}$. Une transposition de l'étiquetage de deux indices intervenant dans h change le signe δ^h .

III - DECOMPOSITION DE L'HOMOLOGIE COMPACTE DE VARIETES

TOPOLOGIQUES, DIFFERENTIABLES OU ANALYTIQUES.

Le passage de la cohomologie à l'homologie est en quelque sorte une DUALISATION.

Or, dans les variétés cette dualisation se fait par un isomorphisme canonique dit de Poincaré-Cartan.

Théorème (4)

Hypothèses

En plus des hypothèses du théorème (3), nous supposons que Z est une variété analytique complexe et que $\{\Sigma_i\}$ est une famille de sous variétés analytiques complexes de Z , de codimension complexe un et en position générale dans Z .

Conclusion

Alors l'HOMOLOGIE singulière à support compact (à coefficients dans etc...) du complémentaire dans Z de la collection Σ , admet la décomposition (non canonique) suivante, en somme directe :

$$H_p^c(Z - \bigcup_j \Sigma_j) = \bigoplus_{h \in \mathbb{P}\{1, \dots, p\}} \delta^h H_{p-|h|}^c(Z \cap_h \Sigma_j)$$

où δ^h est le COBORD h -ITERE de J. Leray, est défini dans la démonstration et est ici une injection.

Démonstration

Rappelons que " $\{\Sigma_j\}$ sont en position générale en $x \in Z$ " signifie que les différentielles $d\Sigma_j$ évaluées au point x et concernant les surfaces contenant x sont indépendantes, et que la position générale en tout point de Z est la position générale dans Z .

Ainsi, grâce à cette hypothèse, pour $h \in \mathbb{P}\{1, \dots, p\}$, l'intersection $\bigcap_{j \in h} \Sigma_j$ de $|h|$ des surfaces Σ_j reste une sous-variété de Z et sa codimension complexe est $|h|$.

Alors dans la suite exacte (1) de cohomologie du théorème (3) :

$$(1) \quad \mathcal{Q} : H_c^{q-1}(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta} H_c^q(Z - (\Sigma' \cup \Sigma)) \rightarrow H_c^q(Z - \Sigma') \xrightarrow{\mathcal{Q}},$$

l'espace $(\Sigma - \Sigma')$ est en fait une SOUS VARIÉTÉ de $(Z - \Sigma')$ et est de codimension complexe un ; de même $Z - (\Sigma' \cup \Sigma)$ est une variété de même dimension que Z et $Z - \Sigma'$.

Toutes ces variétés ont une orientation canonique en tant que variété complexes. On peut donc appliquer, à chaque terme de cette suite (1), l'isomorphisme φ de Poincaré-Cartan, ce qui donne la suite exacte d'homologie cette fois :

$$\xrightarrow{0} H_{r-1}^c(\Sigma - \Sigma') \xrightarrow{\delta^*} H_r^c(Z - \Sigma' \cup \Sigma) \xrightarrow{j^*} H_r^c(Z - \Sigma') \xrightarrow{0}$$

où j est l'inclusion $(Z - \Sigma' \cup \Sigma) \xrightarrow{j} (Z - \Sigma')$ et où $\delta^* = \varphi \circ \delta \circ \varphi^{-1}$ est, par définition, l'opération cobord de J. Leray pour l'homologie et s'écrit encore δ .

Le reste de la preuve du théorème (3) subsiste sans changement. L'opération cobord h -itéré de J. Leray pour l'homologie

correspondant à l'ensemble (ordonné) $h \subset \{1, \dots, p\}$ est encore définie inductivement par $\delta^h = \delta \circ \delta^{h-1}$, et est anticommutative.]].

Remarques

(1) La preuve que nous venons de donner marche encore pour des variétés topologiques réelles orientées : il suffit de remplacer dans l'énoncé l'hypothèse de position générale des Σ_j dans Z par l'hypothèse que pour tout $h \subset \{1, \dots, p\}$, $\bigcap_h \Sigma_j$ est une sous variété topologique fermée de Z et est de codimension réelle $2|h|$.

(2) De plus, les conditions de codimension peuvent être abandonnées; on obtient alors une formule similaire mais dans laquelle l'opérateur δ de cobord d'homologie n'a plus le degré + 1.

Théorème (5)

Soit $\{S^{i'}, S_0, S_i\}$ une famille de sous-variétés, analytiques, complexes, compactes, en position générale et de codimension un de l'espace projectif complexe de dimension n , $\mathbb{P}^n$.

On a pris : $S_0 = \bar{\mathbb{P}}^n - \mathbb{C}^n = \bar{\mathbb{P}}_\infty^{n-1}$ = l'hyperplan de l'infini, et

$(i', i) \in J' \times J$.

Posons $Z = \bigcap_{J'} \mathbb{C}^n \cap S^{i'}$ et $\Sigma_i = Z \cap S_i$ pour tout $i \in J$. Alors, l'homologie (resp. La cohomologie) admet la décomposition :

$$H_*^c(Z - \bigcup_{i \in J} \Sigma_i) = \bigoplus_{h \in \mathcal{P}(J)} \delta^h H_{*-|h|}^c(Z \cap \bigcap_h \Sigma_i)$$

où les notations sont celles des théorèmes (3) et (4).

Démonstration

Il suffit de vérifier que les hypothèses du théorème (4) sont vérifiées ; c'est le but du lemme :

Lemme (4) d'exil isotopique

Pour tout compact $K \subset \mathcal{C}^n$ et pour tout $j \in J$, il existe une isotopie Z -ambiante σ_{Kj} qui laisse invariante toutes les variétés Σ_i à l'exception de Σ_j qu'elle exile hors de K : $\sigma_{Kj}(\Sigma_j) \subset Z - K$.

Preuve

On va écrire explicitement cet exil.

Employons des coordonnées homogènes

$$z = (x_0, x) = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{C}^{n+1} - \{0\}.$$

Considérons $S_0 = \bar{P}_\infty^{n-1}$ comme étant définie par $x_0 = 0$,
 $\mathcal{C}^n$ comme étant définie par $x_0 = 1$,
 et $\bar{P}^n$ comme l'espace quotient par la relation
 usuelle $z \sim \lambda z$ ($\lambda \in \mathcal{C} - \{0\}$).

Soit $(\mathcal{C}^{n+1} - \{0\}) \xrightarrow{\tau} \bar{P}^n$ cette identification.

Alors, par le théorème de Chow, et l'hypothèse, il existe un polynôme homogène irréductible f_i (resp. $f^{i'}$ dans $\mathcal{C}[z]$ tel que S_i (resp. $S^{i'}$) soit l'image par τ de l'ensemble des zéros de $f_i(x_0, x)$ (resp. $f^{i'}(x_0, x)$).

On peut supposer que le point $z = (1, 0)$ n'appartient à aucun des S et, après réétiquetage, que $j = 1$.

Alors, il existe dans $\mathcal{C}^n = \bar{P}^n - S_0$ une boule fermée $B(0, \rho)$ centrée

en $(1, 0)$ et de rayon $\rho > 0$ ne rencontrant aucun des S_i et $S^{i'}$.

Alors, pour tout $\lambda \in (\mathcal{C} - \{0\})$ posons

$$\lambda_{f_1}(x_0, x) = f_1(\lambda x_0, x) \text{ et désignons par}$$

λ_{S_1} l'ensemble des zéros de $\lambda_{f_1}(1, x)$.

Ainsi $^1S_1 = S_1$ et la boule $B(0, \lambda_0)$ ne coupe pas λ_{S_1} . Mais la famille $B(0, \lambda_0)$ est cofinale dans celle des compacts de $\mathcal{C}^n = \bar{P}^n - S_0$, donc λ_{S_1} est en exil hors du compact $K \subset \mathcal{C}^n$ dès que $|\lambda|$ est assez grand. Il reste à montrer que cet exil est bien une isotopie Z -ambiante.

Lemme (5)

L'ensemble $L \subset \mathcal{C} - \{0\}$ des λ tels que la famille $\{S^1, \dots, S^{p'}, S_0, \lambda_{S_1}, \dots, \lambda_{S_p}\}$ (où seule λ_{S_1} varie) ne soit pas en position générale, est un sous ensemble algébrique de $\mathcal{C} - \{0\}$; (donc comme $1 \notin L$, on a $L \neq \mathcal{C} - \{0\}$, et donc L est un ensemble fini de points de $\mathcal{C} - \{0\}$).

Preuve

En effet, λ appartient à L si et seulement si la $(n+1 + p + p') \times (1 + p + p')$ matrice suivante est de rang strictement inférieur à $1 + p + p'$.

$$\lambda_M =$$

1	$f^{i'} / x_0$	f_i / x_0
0	$f^{i'} / x$	f_i / x
x_0	0	0
0	f^1	0
		$f^{p'}$
		λ_{f_1}
		f_p

Partout f_1 est remplacé par λ_{f_1} .

Mais tout déterminant que l'on peut extraire de λ_M est un polynôme homogène, et la théorie de l'élimination montre donc que L est un ensemble algébrique. Ce qui prouve le lemme (5)]].

Pour finir la démonstration du lemme d'exil isotopique, on fait appel au corollaire du théorème (2) d'isotopie qui nous permet d'affirmer que $[\mathcal{C} - \{0\} - L]$ est une base d'isotopie pour

$$(\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset \bar{P}^n \times [\mathcal{C} - \{0\}] \xrightarrow{\pi} [\mathcal{C} - \{0\}])$$

$$\text{où } \mathfrak{s}_0 = \left(\bigcup_{j'} S^j \cup S_0 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p \right) \times (\mathcal{C} - \{0\})$$

est le produit par $(\mathcal{C} - \{0\})$ de la réunion de toute la famille donnée

hormis S_1 ,

et où
$$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}_0 \cup_{\lambda} (\lambda S_1 \times (\mathcal{C} - \{0\})).$$

En d'autres termes, on a la trivialité locale :

$$\bigcup_{\lambda} [\bigcup_{J'} S^{i'} \cup S_0 \cup \lambda S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p] \times \{\lambda\} \subset \bar{P}^n \times (\mathcal{C} - \{0\} - L).$$

Il suffit maintenant de prendre pour σ la classe d'isotopie ambiante que la proposition (1) associe au segment $\widehat{1\lambda}$ de $\mathcal{C} - \{0\} \cup L$.]].

- - - - -

C H A P I T R E V

S O L U T I O N P A R T I E L L E D E N O T R E P R O B L E M E N° 4

 $\pi_1(B(E, t_o) ; t_o)$ O P E R A N T S U R $H(E(t_o))$

F O R M U L E D E P I C A R D - L E F S C H E T Z - L E R A Y

Le problème N° 4 consiste, une fois connue la composante d'isotopie, $B(E, t_0)$ d'un point $t_0 \in T$ de la base T d'un objet E , à calculer l'action de son groupe d'homotopie $\pi_1(B(E, t_0))$ sur les groupes d'homologie et de cohomologie de la fibre $E(t_0)$ de E en t_0 . L'objet E sera une variété fibrée filtrée en projetés supposé de la forme $E = [\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Z \times T \rightarrow T]$.

I - LOCALISATION DANS LA BASE

On suppose de plus que T est un espace affine complexe et que $t_0 \in T$ est tel que la composante d'isotopie ambiante, $B(E, t_0) = T - L$ de t_0 pour E , soit le complément d'un sous ensemble ALGEBRIQUE complexe $L \subset T$ fermé dans T .

L'appendice A montre que le groupe d'homotopie $\pi_1(T - L, t_0) = \pi_1(B(E, t_0); t_0)$ est engendré par un nombre fini de lacets élémentaires $\alpha(y)$ défini chacun par un point $y \in L$ régulier de L et donc appartenant à une et une seule composante irréductible L_β de codimension un de L et dont notre $y \in L_\beta$ est régulier.

On peut donc supposer que T est le plan complexe $\mathbb{C}$ de dimension un et que $L = L_\beta = y$ et t_0 sont deux points distincts de ce plan. On pourra prendre $t_0 = \{1\}$, $y = L = \{0\}$ et $\alpha(y)$ le lacet élémentaire



Dans ce qui suit, nous supposons cette localisation effectuée.

II - LOCALISATION A CERTAINS OUVERTS W DE LA FIBRE Z

Soit $\mathcal{E} = [\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Z \times T \rightarrow T]$ un objet dont nous désignerons la fibre en t_0 par $\mathcal{E}(t_0) = E = [S_0 \subset S_1 \subset Z \rightarrow t_0]$.

Soit $W \subset Z$ un ouvert de la variété Z tel que la frontière $\dot{W}$ de W soit une rétraction par déformation de voisinage compatible à S_0 et S_1 . On désigne par $\bar{W}$ et $\backslash W$ la fermeture et le complément de W dans Z , ce sont deux fermés.

Convention concernant l'homologie de la fibre $H_*^c(E)$, $H_*^c(E \cap W)$, $H_*^F(E \cap \underline{W})$

Lorsqu'on parle de E comme espace topologique, on entend par là tout sous espace $E \subset Z$ de l'espace Z que l'on peut former par les moyens habituels (union, intersection, passage à complément) à partir des fermés constitués par $S_0 \subset S_1 \subset Z$ et éventuellement des composantes irréductibles de S_0 et S_1 (par exemple dans le cas algébrique où S_1 est en fait la réunion $(m)S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_m$ de variétés algébriques irréductibles)*.

De même, on désigne par $E \cap W$ l'espace induit sur W par l'espace précédent.

* E sera, par exemple, $Z - (m)S$, ou $S_1 \cap \dots \cap S_k - (S_{k+1} \cup \dots \cup S_m) = (k)S - (k)S$, lorsqu'on voudra spécifier E on écrira E' , ou E'' , etc., au lieu de E .

Alors, suivant la famille du supports, on désigne l'homologie de E et celle de $E \cap W$ par

$H_*^c(E)$ homologie de E à supports compacts

$H_*^F(E)$ homologie de E à supports fermés

$H_*^F(E \cap \underline{Z})$ homologie de E à supports fermés dans Z

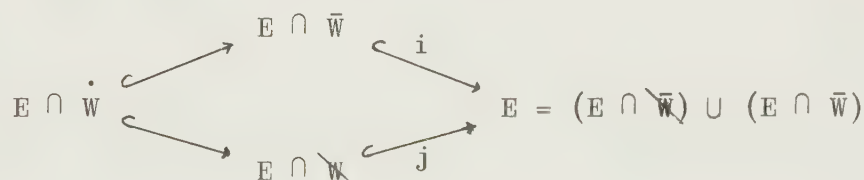
$H_*^c(E \cap W)$ homologie de $E \cap W$ à supports compacts

$H_*^F(E \cap W)$ homologie de $E \cap W$ à supports fermés

$H_*^F(E \cap \underline{W})$ homologie de $E \cap W$ à supports fermés dans W

Lemme 1

Au diagramme d'inclusions canoniques



correspond la suite exacte de Mayer-Vietoris :

$$\rightarrow H_p^c(E \cap \dot{W}) \rightarrow H_p^c(E \cap \bar{W}) \oplus H_p^c(E \cap \dot{W}) \rightarrow H_p^c(E) \xrightarrow{\delta} H_{p-1}^c(E \cap \dot{W})$$

Preuve

En effet la rétraction par déformation de voisinage, sur $\dot{W}$ est compatible à E .]]

Les homomorphismes de trace dans W

Ce sont les homomorphismes :

$$W_* : H_*^c(E) \rightarrow H_*^F(E \cap \underline{W})$$

et

$$W_* : H_*^F(E \cap \underline{Z}) \rightarrow H_*^F(E \cap \underline{W})$$

qui correspondent intuitivement à associer à un représentant d'un cycle situé dans E , sa trace géométrique dans $E \cap W$, qui représente alors un cycle à support fermé dans W de $E \cap W$.

On peut encore le définir par la flèche oblique rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 H_*^c(E \cap \mathcal{W}) & \longrightarrow & H_*^c(E) & \longrightarrow & H_*^c(E, E \cap \mathcal{W}) \\
 & & \searrow W_* & & \downarrow \begin{array}{l} \text{excision} \\ \text{isomorphisme} \end{array} \\
 & & & & H_*^c(E \cap \bar{W}, E \cap \bar{W}) \\
 & & & & \downarrow \text{isomorphisme} \\
 & & & & H_*^F(E \cap \underline{W})
 \end{array}$$

Car $H_*^F(E \cap \underline{W}) \simeq \varprojlim_K H_*^c(E \cap W, E \cap W - K)$ où K parcourt les compacts de W .

On forme les produits

$$\Omega = W \times T \subset Z \times T$$

$$\cancel{\Omega} = \cancel{W} \times T \subset Z \times T$$

$$\bar{\Omega} = \bar{W} \times T \subset Z \times T$$

$$\dot{\Omega} = \dot{W} \times T \subset Z \times T$$

et les objets :

$$\varepsilon^{\dot{W}} = [\dot{\Omega} \subset (\mathfrak{s}_0 \cup \dot{\Omega}) \subset (\mathfrak{s}_1 \cup \dot{\Omega}) \subset Z \times T \rightarrow T]$$

$$\varepsilon^{\cancel{W}} = [\cancel{\Omega} \subset (\mathfrak{s}_0 \cup \cancel{\Omega}) \subset (\mathfrak{s}_1 \cup \cancel{\Omega}) \subset Z \times T \rightarrow T]$$

$$\varepsilon^W = [\bar{\Omega} \subset (\mathfrak{s}_0 \cup \bar{\Omega}) \subset (\mathfrak{s}_1 \cup \bar{\Omega}) \subset Z \times T \rightarrow T]$$

Lemme 2 de localisationHypothèse

- (a) $\mathcal{E}^{\dot{W}}$, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}^{\setminus W}$ ont les mêmes composantes d'isotopie dans T
- (b) $\mathcal{E}^{\dot{W}}$ est compatible à une rétraction sur $\dot{\Omega} \subset Z \times T$ par déformation de voisinage
- (c) $\mathcal{E}^W$ est un objet trivial

Conclusion

La classe d'isotopie ambiante de E correspondant à notre lacet élémentaire $\alpha(y)$ admet un représentant ϕ qui a les propriétés suivantes :

- (1) ϕ est l'identité sur $E \cap \bar{W}$
- (2) l'image de $J_* : H_p^c(E \cap \bar{W}) \rightarrow H_p^c(E)$
est dans le noyau de $\text{Var} : H_p^c(E) \rightarrow H_p^c(E)$

où Var désigne la variation $(\phi_* - \text{Id})$ ou différence de classe d'un cycle avant et après l'isotopie ϕ .

Autrement dit $\text{Var} \circ J_* = 0$, ou encore :

Si une classe de E admet un représentant ne rencontrant pas $\bar{W}$, alors elle demeure inchangée par l'isotopie ambiante.

- (3) L'homomorphisme Var admet une factorisation Var au travers de i_* :

$$\begin{array}{ccc}
 H_p^c(E) & \xrightarrow{\text{Var}} & H_p^c(E) \\
 & \searrow \text{Var} & \uparrow i_* \\
 & & H_p^c(E \cap W)
 \end{array}$$

- (4) L'homomorphisme War admet une factorisation var au travers de W_*
(trace dans W)

$$\begin{array}{ccc}
 H_p^c(E) & & \\
 \downarrow W_* & \searrow \text{War} & \\
 H_p^F(E \cap \underline{W}) & \xrightarrow{\text{var}} & H_p^c(E \cap W)
 \end{array}$$

- (5) L'homomorphisme Var admet la factorisation $\text{Var} = i_* \circ \text{var} \circ W_*$

$$\begin{array}{ccc}
 H_p^c(E) & \xrightarrow{\text{Var}} & H_p^c(E) \\
 \searrow W_* & & \nearrow i_* \\
 H_p^F(E \cap \underline{W}) & \xrightarrow{\text{var}} & H_p^c(E \cap W)
 \end{array}$$

- (6) Si, pour une dimension p , $H_p^F(E \cap \underline{W})$ ou $H_p^c(E \cap W)$
est nul, alors Var est nul en cette dimension.
- (7) Tous les homomorphismes précédents commutent aux homomorphismes
naturels

$$H_*(E') \longrightarrow H_*(E'')$$

où E' et E'' sont deux spécifications de E .

Preuve

Il découle trivialement des hypothèses (a) et (c) que ϕ peut être choisi laissant globalement invariant séparément $\dot{W}$, $\bar{W}$ et $\backslash W$. De plus (c) entraîne alors que ϕ peut être pris égal à l'identité sur $\backslash W$. Donc (1) est prouvé.

Le reste suit :

- (3) parce que la variation d'un cycle de E doit alors être un cycle de $E \cap W$
- (4) parce que la variation d'un cycle de E est la même que celle de son image dans $\bar{W}$ pourvu que l'on maintienne fixe son intersection avec la frontière $\dot{\bar{W}}$ de W , c'est ce qu'assure (1).

Mais, grâce à l'hypothèse (b), on a un isomorphisme déjà remarqué :

$$H_p^F(E \cap \underline{W}) \simeq H_p^c(E \cap \bar{W}, E \cap \dot{\bar{W}}) \quad]]$$

Remarque : aucune hypothèse de connexité, simple connexité ou de convexité n'a encore été faite sur l'ouvert fixe $W \subset Z$.

III - FORMULE DE PICARD-LEFSCHETZ-LERAY

1. SITUATION

Localement, la fibre $S(t)$ de $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s}$ est la réunion d'hypersurfaces en position générale pour toute valeur de t sauf pour une valeur $y = t$ du paramètre pour laquelle la fibre présente une singularité ponctuelle quadratique.

Autrement dit, outre les hypothèses du lemme de localisation, on suppose que l'objet $\mathcal{E} = [\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset Z \times T \rightarrow T]$, sa fibre en $t \in T = \emptyset$ $E(t) = [S_0(t) \subset S_1(t) \subset Z \times \{t\} \rightarrow t]$, et l'ouvert fixe $W \subset \bar{W} \subset \emptyset' \subset Z$ satisfont les conditions suivantes :

Z est une variété analytique complexe de dimension complexe r

$x = (x_1, x_2, \dots, x_r) \in \emptyset'$ sont les coordonnées locales,

$\bar{W}$ est la boule fermée $\bar{W} = \{x \mid \|x\| \leq 2\}$,

$S_0(t) \cap W = S_1(t) \cap W = S(t) \cap W$ est formé de la collection des

m hypersurfaces $\{S_1(t), S_2(t), S_3(t), \dots, S_m(t)\}$

d'équations

$$\begin{cases} \mathfrak{s}_1(x, t) \equiv x_1 & \text{pour } S_1 \\ \mathfrak{s}_2(x, t) \equiv x_2 & \text{pour } S_2 \\ \vdots \\ \mathfrak{s}_{m-1}(x, t) \equiv x_{m-1} & \text{pour } S_{m-1} \end{cases}$$

$$\mathfrak{s}_m(x, t) \equiv x_m^2 + \dots + x_r^2 - (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{m-1}^2) - t \text{ pour } S_m$$

on prend $|t| \leq 1$

On pose

$$\begin{cases} kS = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k \\ \text{\text{--}}_k S = S_{k+1} \cup \dots \cup S_m \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} kS = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_k \\ \text{\text{--}}_k S = S_{k+1} \cap \dots \cap S_m \end{cases}.$$

L'indice k de gauche signifie donc $\begin{cases} \text{la r\'eunion} & \text{s'il est en bas} \\ \text{l'intersection} & \text{s'il est en haut} \end{cases}$
des k premières surfaces si k n'est pas barré,
des $(m-k)$ dernières surfaces si k est barré.

Les spécialisations ${}^0E, {}^1E, \dots, {}^mE$ qui nous intéressent de l'espace topologique E correspondent dans W aux espaces :

$$W - {}_m S, \dots, ({}^k S - \text{\text{--}}_k S) \cap W, \dots, {}^m S \cap W ;$$

ou même, pour l'étude de l'homologie relative, les couples :

$$(W, {}_m S), \dots, ({}^k S, \text{\text{--}}_k S) \cap W, \dots, {}^m S \cap W .$$

2. PRINCIPE DE LA METHODE

Nous cherchons en fait la variation de la classe d'un cycle h de $H_p^c({}^0E)$;

D'après le point (5) du lemme de localisation, il suffit de connaître la variation de sa trace dans $H_p^F({}^0E \cap W)$. Le point (7) nous permettra de nous ramener ici par transport à la variation d'une classe de $H_p^F({}^mE \cap W)$.

Mais ${}^mE \cap W$ est une sphère complexe $S^d(t)$ de dimension d , paramétrée par le carré t de son rayon.

La variation de $H_p^F(S^d(t))$ autour de $t = 0$ est alors donnée par la formule maintenant classique de Picard-Lefschetz complétée par J. Leray

$$\text{var } \gamma = n''' e(S^d)$$

où $e(S^d)$ est le "cycle évanouissant" : sphère de gorge orientée de S^d , et où n''' est, au signe près l'indice d'intersection de Kronecker de γ et de $e(S^d)$.

3. HOMOLOGIES DANS W

3.1 pour $k = 0, 1, \dots, m-1$ et $k \neq m$

${}^kS$ est le $(r-k)$ -plan complexe

ie ${}^kS = \mathbb{C}^{r-k}$ si $k \neq m$

donc l'homologie réduite : $\widetilde{H}_*^c({}^kS) = 0 \quad \forall k \neq m$

3.2 pour $k = m$:

${}^mS$ est la $(r-m)$ sphère complexe dans ${}^{m-1}S = \mathbb{C}^{r-m+1}$

ie ${}^mS(t) : x_m^2 + \dots + x_r^2 - t = 0 \quad (x_1 = x_2 = \dots = x_{m-1} = 0)$

or une n -sphère complexe affine est difféomorphe au fibré tangent de la n -sphère réelle affine dite de gorge :

$$x_m^2 + \dots + x_r^2 - t = 0 \quad \left(\frac{x_m}{\sqrt{t}}, \dots, \frac{x_r}{\sqrt{t}} \text{ réels} \right)$$

Cette sphère réelle, une fois orientée, définit un cycle dont la classe d'homologie $e({}^mS \cap W) \in \widetilde{H}_{r-m}^c({}^mS \cap W)$ est une base du groupe

d'homologie réduite $\widetilde{H}_*^c({}^m S \cap W) \simeq \mathbb{Z}$ (cyclique infini).

Définition

Cette sphère réelle s'appelle sphère évanouissante (elle devient un point si $t = 0$).

En utilisant le triplet exact de J. Leray^{*} (dû à la POSITION GENERALE de $S_1, \dots, S_m$)

$$\begin{array}{ccc}
 H_*^c(jS, \underset{k}{\setminus} S \cup S_\mu) & & \\
 \uparrow p & \searrow \partial & \\
 H_*^c(jS, \underset{k}{\setminus} S) & \xleftarrow{i} & H_*^c(jS \cap S_\mu, \underset{k}{\setminus} S)
 \end{array}$$

où $0 \leq j < \mu < k \leq m$

où ∂ est le BORD^{*} de J. Leray,

puis en utilisant la dualité^{**} par intersection ponctuelle, on montre respectivement les points (1) et (2) du lemme suivant :

Lemme 3

(1) Le bord composé $\partial^m : \widetilde{H}_*^c(W, \underset{m}{\setminus} S) \simeq \widetilde{H}_{q-m}^c({}^m S \cap W)$ est un isomorphisme des groupes d'homologie réduite.

Donc $\widetilde{H}_*^c(W, \underset{m}{\setminus} S)$ est nul en toute dimension sauf r

et $\widetilde{H}_r^c(W, \underset{m}{\setminus} S)$ est un groupe cyclique infini dont un générateur est $e(W, \underset{m}{\setminus} S) = (\partial^m)^{-1} e({}^m S \cap W)$ et se nomme CLASSE EVANOUISSANTE de $(W, \underset{m}{\setminus} S)$.

^{*}Cf. J. Leray III

^{**}Cf. Appendice B

$$(2) \quad \underline{\text{Le cobord composé}} \quad \underline{\delta^m} : H_r^F(\underline{W} - {}_m S) \xrightarrow{\sim} H_{r-m}^F({}^m S \cap W)$$

est un isomorphisme de groupes infinis cycliques et tous les autres groupes de ces homologies sont triviaux

(à part $H_{2(r-m)}^F({}^{(m)}S \cap W)$)

[avec la convention que $H_q^F({}^m S \cap W) = \widetilde{H}_q^c({}^m S \cap W)$ lorsque ${}^m S \cap W$ est compact].

Les générateurs de ces groupes s'appellent classe co-évanouissante de l'espace correspondant : $\delta^m : \mathcal{E}(\underline{W} - {}_m S) \hookrightarrow \mathcal{E}({}^m S \cap W)$.

(3) L'intersection ponctuelle satisfait à

$$1 = K \int [\mathcal{E}(\underline{W} - {}_m S), e(W, {}_m S)] = K \int [\mathcal{E}({}^m S), e({}^m S)]$$

(4) Si $r \neq m - 1$, l'homomorphisme

$$\delta^m : H_r^c(W - {}_m S) \hookrightarrow H_{r-m}^c({}^m S \cap W)$$

est un isomorphisme.

La classe évanouissante de $(W - {}_m S)$ est alors définie comme l'image $e(W - {}_m S) = \delta^m e({}^m S \cap W)$

(5) Remontant maintenant à la fibre par l'injection $W \xrightarrow{i} Z$, on appelle classe évanouissante de $Z - {}_m S(t)$

$$e(Z - {}_m S(t)) = i_* e(W - {}_m S) = i_* \delta^m e({}^m S \cap W)$$

$$\text{l'image par } i_* : H_r^c(W - {}_m S) \rightarrow H_r^c(Z - {}_m S)$$

$$e(Z - {}_m S(t)) = i_* e(W - {}_m S) = i_* \delta^m e({}^m S \cap W)$$

Preuve

(3) exprime que (2) se déduit de (1) par dualité par intersection

ponctuelle ;

(4) résulte du théorème de décomposition (qui s'applique puisqu'il y a position générale dans W pour $t \neq 0$).]]

4. LE THEOREME DE PICARD-LEFSCHETZ-LERAY

Sous les hypothèses formulées en 1 et avec les notations que nous venons de donner,

(I) L'homomorphisme de variation après un tour

$$\text{Var} : H_*^c(Z - {}_m S(t)) \rightarrow H_*^c(Z - {}_m S(t))$$

est nul en toute dimension, excepté en la dimension r de Z , si elle est différente de $m - 1$;

(II) et si $r \neq m - 1$, cet homomorphisme :

$$\text{Var} : H_r^c(Z - {}_m S(t)) \rightarrow H_r^c(Z - {}_m S(t))$$

est explicité par

$$h_r(Z - {}_m S(t)) \xrightarrow{\text{Var}} n e(Z - {}_m S(t))$$

$$\text{où } e(Z - {}_m S(t)) = i_* \delta^m e({}_m S \cap W)$$

$$\text{et } n = (-1)^{\frac{(r-m+1)(r-m+1)}{2}} \text{KI}[h_r(Z - {}_m S(t)), e(W, {}_m S(t))]$$

Preuve

1°/ D'après le lemme de localisation, Var se factorise au travers de

$$H_*^F(W - {}_m S) \xrightarrow{\text{var}} H_*^c(W - {}_m S)$$

qui, d'après le lemme 3 est nul, sauf en dimension r si $r \neq m - 1$.

Donc (I) est démontré.]

Pour démontrer II, en dimension $r \neq m - 1$, on utilise encore le lemme de localisation dont la partie (5) donne :

$$\text{Var } h_p(Z - {}_m S(t)) = i_* \circ \text{var} \circ W_r \circ h_p$$

et dont la partie (7) donne :

La ligne suivante est la transposée, par la dualité par intersection, de celle du haut du carré commutatif qui suit

$$\begin{array}{ccc} H_r^c(W, {}_m S) & \xrightarrow{\partial^m} & H_r^c({}^m S \cap W) \\ H_r^F(W - {}_m S) & \xleftarrow{\underline{\delta}^m} & H_{r-m}^F({}^m S \cap W) \\ \downarrow \text{var} & & \downarrow \text{var} \\ H_r^c(W - {}_m S) & \xleftarrow{\underline{\delta}^m} & H_{r-m}^c({}^m S \cap W) \end{array}$$

d'où

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} KI < W_* \circ h_p | e(W, {}_m S) > = \\ = KI < (\underline{\delta}^m)^{-1} \circ W_* \circ h_p | \partial^m e(W, {}_m S) > = \\ = KI < (\underline{\delta}^m)^{-1} \circ W_* \circ h_p | e({}^m S \cap W) > = n' \end{array} \right.$$

et

$$(2) \quad \text{Var } h_p = i_* \circ \underline{\delta}^m \circ \text{var} \circ (\underline{\delta}^m)^{-1} \circ W_* \circ h_p$$

2°/ Le cas classique de Picard-Lefschetz-Leray pour la sphère complexe de dimension $(r-m)$ est :

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \text{var } \gamma = n'' e({}^m S \cap W), \quad \gamma \in H_r^F({}^m S \cap W) \\ \text{où } n'' = (-1)^{(r-m+1)(r-m+2)} KI < \gamma | e({}^m S \cap W) \end{array} \right.$$

3°/ De (1) (2) et (3) on tire bien la formule

$$\boxed{\text{Var } h_p = n e(Z - {}_m S(t))}$$

avec $n = n' n''$ et $\gamma = (\underline{\delta}^m)^{-1} \circ W_* \circ h_p$.

]]

C H A P I T R E VI

L E S D I A G R A M M E S D E F E Y N M A N

A U N E S E U L E B O U C L E

I - DESCRIPTION

Un graphe abstrait est à une seule boucle

$$G : (L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\$} (V, x)$$

si son noyau abstrait est NUL

(il n'y a pas de ligne dont les vertex source et but soient égaux)

et son noyau vectoriel associé

$$0 \rightarrow N(G) \rightarrow \mathcal{C}^4(L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\$} \mathcal{C}^4(V, x)$$

a sa décomposition canonique

$$N(G) = N_x(G) \oplus N_B(G)$$

telle que

$$N_B(G) = \mathcal{C}^4$$

[On rappelle que l'ensemble L des lignes est la réunion disjointe de l'ensemble E des lignes externes et de l'ensemble J des lignes internes

ie $(L, 0) = (E, 0) \oplus (J, 0)$ (somme directe)

avec $(j \in J) \Leftrightarrow (x = \$(j) \text{ ou } x = \mathbb{B}(j))$

$$\text{et} \quad N_x(G) = N(G) \cap \mathcal{C}^4(E, 0) = T_G$$

$$N_B(G) = N(G) \cap \mathcal{C}^4(J, 0) = Z_G$$

$$\lambda \in N(G) \Leftrightarrow (\lambda \in \mathcal{C}^4(L, 0) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}(\lambda) = \mathcal{B}(\lambda)) \quad]$$

- On convient de laisser tomber des arbres variables superflues ;
on désigne
- Le quadrivecteur d'intégration par $\underline{q} = (q_0, \vec{q}) \in \mathcal{C}^4 = Z_G$
- et le paramètre par

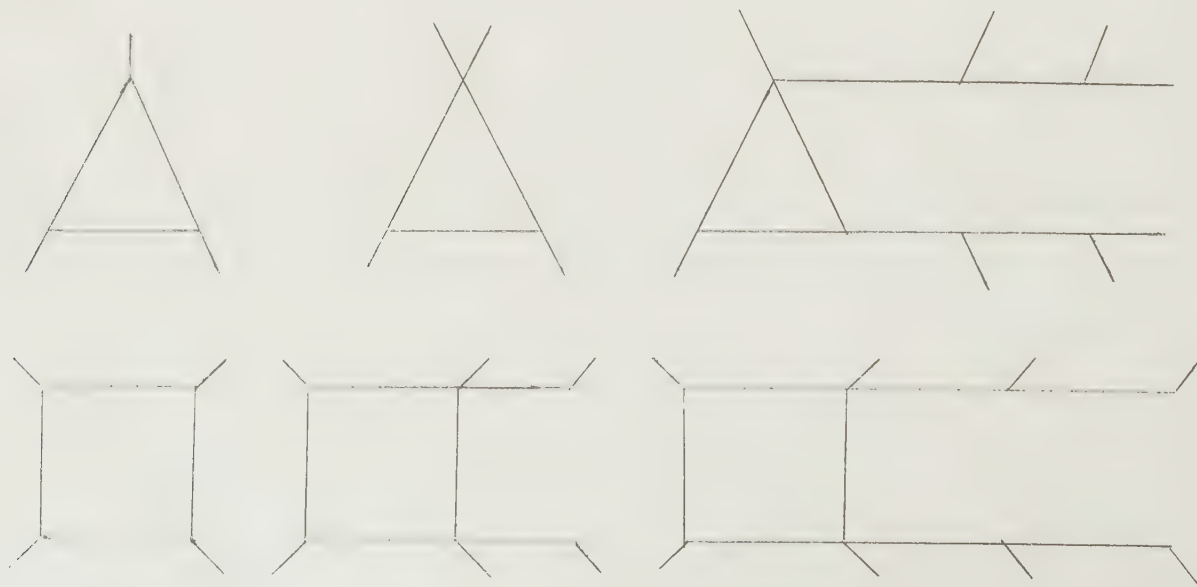
$$t = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_j, \dots, \underline{a}_{|J|-1}, (m)) \in T_G$$

où on a incorporé à t la masse interne $(m) = (m_1, \dots, m_{|J|})$.

- On suppose que le nombre de lignes internes fondamentales est supérieur ou égal à trois : $|J| \geq 3$.

Voici quelques exemples de graphes à une seule boucle :

avec nos conventions, on se ramène au graphes de gauche pour chaque ligne



II - L'INTEGRALE MULTIPLE GENERATRICE

L'étude de la "fonction de Feynman", se ramène d'après le chapitre II, à l'étude de l'intégrale MULTIPLE :

$$[G, \mathbb{R}, \varepsilon] \int_{\mathbb{R}^4} \frac{d^4 q}{\bar{Q}_{1\varepsilon} \cdot \bar{Q}_{2\varepsilon} \cdots \bar{Q}_{J\varepsilon}}$$

où $Q_{j\varepsilon} = (\underline{q} + \underline{a}_j)^2 + m_j^2 + i\varepsilon$

et où $\underline{r}^2 = r_0^2 + \vec{r}^2$ est le carré euclidien.

Rappelons que si $t_\varphi = (\underline{a}_j, m_j)$ est la valeur physique initiale du paramètre, la fonction de Feynman en ce point est obtenue

1°) en calculant au voisinage d'un point t_0 à coordonnées réelles assez petites le germe de la fonction définie par $[G, \mathbb{R}, \varepsilon]$

2°) en prolongeant analytiquement ce germe le long d'un chemin quelconque $\overbrace{t_0 t_\varphi}$ parmi ceux situés dans le domaine étoilé déjà considérés au chapitre II, par exemple tels que $t \in \underline{iT}_{\mathbb{R}}$.

3°) en prenant la limite quand ε tend vers zéro.

On désigne l'objet géométrique initial associé par :

$$E_G = [\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \subset Z_G \times T_G \rightarrow T_G]$$

(Cf. II.I.5)

III - LA MISE SOUS FORME D'UNE INTEGRALE DE TYPE STANDARD

III.0 INTRODUCTION

L'intégrale $[G, \mathbb{R}, \varepsilon]$ est bien multiple, c'est-à-dire absolument convergente, et ce uniformément par rapport au paramètre t lorsque celui-ci a une valeur réelle quelconque. (Cf. Chapitre II). Comme la variété d'intégration $\mathbb{R}^4 \subset \mathbb{C}^4$ n'est pas compacte, cette intégrale n'est cependant pas du type standard tel que celui-ci est défini au chapitre I.

Notre problème est de mettre le germe de la branche de la fonction analytique (multiforme et à singularités) qu'elle définit disons au voisinage d'un point t_0 à coordonnées réelles, sous la forme de la valeur en ce point d'une intégrale de type standard.

Pour cela nous allons compactifier la variété d'intégration de manière à la transformer en un cycle, au besoin relatif mais compact, et ce de façon que les conditions (a), (b), (c) de la définition du type standard (cf. chap. I) soient remplies.

Nous ferons cette modification en une seule étape lorsque $|J| \geq 4$ et en deux étapes lorsque $|J| = 3$. La première étape vaut dans les deux cas.

III.1 PREMIERE ETAPE : COMPACTIFICATION DE L'ESPACE D'INTEGRATION

La variété d'intégration de $[G, \mathbb{R}, \varepsilon]$ est la partie réelle

$$\mathbb{R}^4 = \operatorname{Re} \mathcal{C}^4 \subseteq \mathcal{C}^4 \ni \underline{q} = (q_0, q_1, q_2, q_3).$$

Nous cherchons à compactifier $\mathbb{R}^4$ analytiquement. Pour cela nous allons considérer $\mathcal{C}^4$ comme une carte dense d'une variété analytique complexe compacte $\bar{X}_G$.

De plus, nous ferons notre choix de façon que la partie réelle de $\mathcal{C}^4$ se trouve ainsi compactifiée par un seul point supplémentaire.

1 - L'image bijective de la carte dense est le parabolofde

$$\underline{q}^2 = \sigma \text{ plongé dans l'espace } \mathcal{C}^5 \ni (\underline{q}, \sigma).$$

La carte est donc $\mathcal{C}^4 \hookrightarrow \mathcal{C}^5$

$$\underline{q} \mapsto (\underline{q}, \sigma = \underline{q}^2)$$

2 - La variété analytique complexe compacte est la quatre-sphère

complexe compacte $\bar{\Sigma}^4 = \bar{X}_G$ fermeture de la carte dans la compactification naturelle de $\mathcal{C}^5$ en le plan projectif complexe $\bar{P}^5$

de dimension 5 :

$$\mathcal{C}^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \subseteq \bar{P}^5 \ni (\underline{q}, \sigma, \tau)$$

$$\underline{q} \mapsto (\underline{q}, \underline{q}^2 = \sigma\tau)$$

où $(\underline{q}, \sigma, \tau)$ sont les coordonnées homogènes de $\bar{P}^5$.

On remarque que cette fermeture est non singulière et que sa partie réelle est bien le $\mathbb{R}^4$ d'origine compactifié par un point

supplémentaire seulement :

$$\Omega_q = (q = 0, \sigma = 1, \tau = 0) \in R_e \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$$

III.2 CE QUE DEVIENT L'INTEGRALE DANS CETTE PREMIERE ETAPE

Sous l'injection $\phi^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$, $q \mapsto (q, q^2 = \sigma\tau)$

- la forme différentielle devient :

$$d^4 q \mapsto d^4(q/\tau) = \frac{1}{\tau^5} \sum_{i=0}^{\tau} \frac{q_i}{dq_i} (dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 \wedge d\tau) = \frac{\bar{\omega}}{\tau^4}$$

- et le polynôme $Q_{j\varepsilon}$ devient :

$$Q_{j\varepsilon} = (q + \underline{a}_j)^2 + m_j^2 + i\varepsilon \mapsto q^2/\tau^2 + 2\underline{a}_j \cdot q/\tau + (\underline{a}_j^2 + m_j^2 + i\varepsilon)$$

$$\text{c'est-à-dire} \quad (1/\tau)(\sigma + 2\underline{a}_j \cdot q + (\underline{a}_j^2 + m_j^2 + i\varepsilon)\tau)$$

- et l'intégrale devient*

$$\Gamma_o = R_e \int_{\Sigma^4} \frac{\bar{\omega}}{R(t_o)} = \Gamma_o = R_e \int_{\Sigma^4} \frac{\bar{\omega}}{M_o^\alpha M_1 M_2 \dots M_J}$$

où

$$M_j \equiv \sigma + 2\underline{a}_j \cdot q + (\underline{a}_j^2 + m_j^2)\tau$$

*[Il est bon de remarquer qu'à ce stade les graphes  et  ont la même apparence, mais cependant le triangle n'a pas le même nombre de paramètres que le carré. Le plan M_o qui intervient dans le triangle est fixe, il peut être considéré comme la position particulière du plan $\frac{1}{2} M_4$ du carré lorsque l'on donne au paramètre m_4^2 la valeur infinie].

$$M_o \equiv \tau$$

$$\alpha = 4 - |J|$$

et $\bar{\Sigma}^4$ est définie par $\underline{q}^2 = \sigma\tau$,

où $(\underline{q}, \sigma, \tau)$ forment les coordonnées homogènes de $\bar{P}^5$.

Conclusion

Premier cas, $|J| \geq 4$,

(ie le nombre des lignes formant la boucle du graphe est supérieur ou égal à quatre),

(a) alors l'intégrale est du type standard et le but fixé est atteint.

En effet, les conditions (a) et (b) pour le type standard sont évidemment satisfaites ; reste à examiner la condition (c) : Γ_o est une va-

riété orientable (sphère réelle) compacte, et qui, pour la valeur initiale t_o , ne rencontre pas la surface polaire de l'intégrant puisque,

dans notre cas $|J| \geq 4$, cette surface polaire $R(t_o)$ est constituée

des plans $M_1, M_2, M_3, \dots, M_{|J|}$ où $M_j = \sigma + 2\underline{a}_j \cdot \underline{q} + (\underline{a}_j^2 + m_j^2)\tau$

donc si $\underline{a}_j$ est nul, si m_j est réel et différent de zéro, le plan M_j

ne coupe pas la partie réelle de $\bar{\Sigma}^4$, celle-ci étant définie par

$$\underline{q}^2 = \sigma\tau \quad (\underline{q}, \sigma, \tau) \in R_e \bar{P}^5.$$

Donc dès que $t_o = (a_j, m_j)$ est réel et assez voisin de zéro, $M_j \cap R(t_o)$

est vide.]]

(b) De plus, les plans M_j et la sphère $\bar{\Sigma}^4$ sont en position générale

dans $\bar{P}^5$ pour $t = t_o$; donc dans $\bar{\Sigma}^4$, pour $t = t_o$, les surfaces polaires

$M_1, M_2, M_3, \dots, M_{|J|}$ formant $R(t_o)$ sont en position générale.]]

Deuxième cas, $|J| = 3$

1°) Alors $\Gamma_o = R_e \Sigma^4$ ne coupe toujours pas M_1 , M_2 , ni M_3 , mais son intersection avec la première surface polaire $M_o \equiv \tau$ n'est pas vide, c'est en effet le point de compactification de $\mathbb{R}^4$:

$$\Gamma_o \cap M_o = E_o = \Omega_q = (q = 0, \tau = 0, \sigma \neq 0) \in \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$$

2°) Les surfaces polaires $R(t_o)$ sont en position générale dans $\bar{P}^5$ mais pas dans $\bar{\Sigma}^4 = X'$ puisque le plan $\tau = 0$ est tangent à $\bar{\Sigma}^4$ précisément en ce point Ω_q .

Comme ce point Ω_q est fixe dans $\bar{\Sigma}^4$ ainsi d'ailleurs que le plan $\tau = 0$, on pourrait s'en tirer en faisant une étude telle que lorsque t varie "on ne remue rien dans un voisinage de Ω_q ".

Mais cette solution est peu élégante car elle manque de généralité.

Une méthode plus générale, dite d'éclatement de la singularité, sera instructive ; ici un éclatement linéaire suffira ; c'est une sorte de passage en coordonnées polaires.

En gros, lorsque l'on veut à tout prix séparer en un point deux fonctions qui y prennent la même valeur, on regarde leur dérivée première en ce point, si celles-ci coïncident encore, il faut passer aux jets d'ordre plus élevé en ce point.

III.3 DEUXIEME ETAPE : ECLATEMENT DE $\Omega_q \in \bar{X}_G = \bar{\Sigma}^4$

(nécessaire seulement dans le cas $|J| = 3$)

Le point $(q = \tau = 0, \sigma = 0) = \Omega_q \in \bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$ est caractérisé par l'idéal homogène à quatre générateurs (q_o, q_1, q_2, q_3) dans $\bar{X}_G$

ainsi que par l'inégalité $\sigma \neq 0$.

La façon la plus simple d'effectuer cet éclatement est d'éclater d'abord $\bar{P}^5$ suivant la droite (q_0, q_1, q_2, q_3) en $\tilde{P}^5 \xrightarrow{g} \bar{P}^5$, puis de restreindre cet éclatement g à $\tilde{X}_G = \bar{\Sigma}^4 = \overline{g^{-1}(\bar{\Sigma}^4 - \{\Omega_q\})}$.

Le premier éclatement cherché $\tilde{P}^5 \xrightarrow{g} \bar{P}^5$ s'obtient en restreignant la deuxième projection du produit

$$\begin{aligned} \bar{P}^4 \times \bar{P}^5 &\xrightarrow{g} \bar{P}^5 \\ ((\underline{k}, \rho), (\underline{q}, \sigma, \tau)) &\mapsto (\underline{q}, \sigma, \tau) \end{aligned}$$

$$\tilde{a} \tilde{P}^5 = \{(\underline{k}, \rho) \wedge (\underline{q}, \tau) = 0\} \quad (\text{produit extérieur}).$$

Le deuxième $\tilde{X}_G \rightarrow \bar{X}_G$ est la restriction de g à la fermeture dans $\tilde{P}^5$ de l'image inverse du complément de Ω_q dans la sphère $\bar{\Sigma}^4$. Cette fermeture $\tilde{X}_G = \overline{g^{-1}(\bar{\Sigma}^4 - \{\Omega_q\})} \subset \tilde{P}^5$ est obtenue en adjoignant aux équations de $\tilde{P}^5$ dans $\bar{P}^4 \times \bar{P}^5$, l'unique équation $\underline{k} \cdot \underline{q} = \rho\sigma$

[Maintenant qu'il a été effectué, donnons la caractéristique de l'éclatement $\tilde{X}_G \xrightarrow{g} \bar{X}_G$ suivant le point $\Omega_q \in \bar{X}_G$: c'est un morphisme propre de variétés compactes qui est partout un difféomorphisme, exception faite du point Ω_q dont l'image inverse est une variété (compacte) de codimension un dans $\tilde{X}_G$].

Autrement dit,

$$\begin{aligned} \tilde{X}_G &= \{(\underline{k}, \rho, \underline{q}, \sigma, \tau) \in \bar{P}^4 \times \bar{P}^5 \mid \underline{k} \cdot \underline{q} = \rho\sigma, (\underline{q}, \tau) \wedge (\underline{k}, \rho) = 0\} \subset \tilde{P}^5 \\ &\subset \bar{P}^4 \times \bar{P}^5, \quad \text{et} \quad \tilde{X}_G \xrightarrow{g} \bar{\Sigma}^4 \quad \text{n'est autre que la restriction à } \tilde{X} \end{aligned}$$

de la deuxième projection $\bar{P}^4 \times \bar{P}^5 \rightarrow \bar{P}^5$.

L'intégrale devient alors :

$$\bar{\Gamma}_0 \int \frac{\bar{v}}{R(t_0)}$$

$$\text{où } \overline{R(t_0)} = M_1, M_2, M_3, \bar{M}_0,$$

$$\text{où } \bar{M}_0 \cap g^{-1}(\Omega_q) = \{(\underline{q}, \sigma, \tau, \underline{k}, \rho) \mid \underline{q} = \tau = 0, \sigma = 1, \rho = \underline{k}^2 = 0\}$$

On peut vérifier que l'on a bien obtenu une désingularisation de $(\Sigma^4, R(t_0) \cup E_0)$.

$$\text{Enfin, } \bar{\Gamma}_0 \in H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - \overline{R(t_0)}, \bar{P}_q^3 - \overline{R(t_0)})$$

est un cycle relatif qui ne rencontre PLUS les surfaces polaires*

L'intégrale est donc bien maintenant sous forme d'une intégrale de type standard et de plus les surfaces polaires $\overline{R(t_0)}$ sont en position générale avec la variété $\bar{\Sigma}^4$ pour $t = t_0$.

Ceci liquide la particularité du cas $|J| = 3$ ie du graphe .

III.4 COMPARAISON A UNE AUTRE COMPACTIFICATION

$\tilde{X}_G$ se trouve située dans le produit $\bar{P}^4 \times \bar{P}^5$ du 4-plan projectif par le 5-plan projectif. Ce produit possède deux projections f et g :

$$* \text{ ou encore } \bar{\Gamma}_0 \in H_4^F(\bar{\Sigma}^4 - \overline{R(t_0)} - \tilde{E}_0)$$

En fait, ici, $\bar{\Gamma}_0$ est la partie réelle de $\tilde{\chi}_G$; c'est donc un cycle orientable absolu donc $\bar{\Gamma}_0 \in H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - \overline{R(t_0)})$

$$\bar{P}^4 \xrightarrow{f} \bar{P}^4 \times \bar{P}^5 \xrightarrow{g} \bar{P}^5$$

Examinons les restrictions à $\tilde{X}_G$ de f et g .

On obtient :

$$\bar{P}^4 \xrightarrow{f} \tilde{X}_G \xrightarrow{g} \bar{\Sigma}^4$$

qui sont deux éclatements de deux variétés compactes l'une $\bar{\Sigma}^4$ l'autre $\bar{P}^4$, chacune étant une compactifiée du 4-plan complexe $\mathbb{C}^4$.

En fait le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{X}_G & & \\
 & \swarrow f & \uparrow \rho & \searrow g & \\
 \bar{P}^4 & & & & \bar{\Sigma}^4 = \bar{X}_G \\
 & \nwarrow \mu & \downarrow & \nearrow \nu & \\
 & & \mathbb{C}^4 & &
 \end{array}$$

où l'injection ouverte ν a déjà été décrite

et où l'injection ouverte μ est la carte naturelle $\mathbb{C}^4 \rightarrow \bar{P}^4$, $\underline{q} \mapsto (\underline{q}, 1)$.

μ et ν sont d'image dense, et f et g sont inversibles sur ces images ce qui permet de "remonter" ν et μ de deux façons possibles, mais il n'est que d'examiner les équations pour voir que ces deux flèches coïncident.

La compactification $\overline{\nu(\mathbb{C}^4)}$ était suffisante pour notre problème dès que $|J| \geq 4$.

La compactification $\overline{\mu(\mathbb{C}^4)}$ peut sembler plus naturelle (encore que cela soit une pure question de goût) :

elle compactifie la variété d'intégration R^4 en une variété, non orientable il est vrai, $\Gamma'_0 = R_e(\bar{P}^4)$ qui ne rencontre pas les nouvelles surfaces polaires $S(t_0)$ du moins pour $t = t_0$; donc si $D_0 = \bar{P}^3_\infty = \{(\underline{k}, \rho) \mid \rho = 0\} \subset \bar{P}^4$. On a bien une intégrale de type standard dont le cycle d'intégration est relatif $\Gamma'_0 \in H^4(\bar{P}^4 - S(t_0), \bar{P}^3_\infty - S(t_0))$. et l'on pourrait s'en tenir là pour notre problème.

Malheureusement, les composantes irréductibles de $S(t_0)$ ne sont plus en position générale pour $t = t_0$, elles ont toutes une variété commune V , de dimension deux à l'infini :

$$V = \{(\underline{k}, \rho) \mid \rho = 0 \quad \underline{k}^2 = 0\} \subset \bar{P}^3_\infty = D_0$$

Et nous serions gênés pour le problème du calcul de composante d'isotopie ambiante de t_0 pour s . C'est pourquoi, un éclatement supplémentaire de $\bar{P}^4$ le long de V cette fois est nécessaire "pour mettre ces surfaces en position générale".

Lorsqu'on exécute un tel éclatement, on trouve précisément la flèche $\bar{P}^4 \xleftarrow{f} \tilde{X}_G$ de notre diagramme.

Conclusion

Donc, si l'on cherche à avoir à la fois :

- type standard pour l'intégrale,
- position générale pour la surface polaire, et la variété dans laquelle borde le cycle définitif d'intégration relative,

alors la compactification $\overline{\nu(\phi^4)}$ est meilleure pour $|J| \geq 4$ que la compactification $\overline{\mu(\phi^4)}$, en ce sens que $\overline{\mu(\phi^4)}$ est insuffisante

et oblige à la compactification $\overline{\rho(\ell^4)}$ qui DOMINE la compactification alors suffisante $\overline{\nu(\ell^4)}$.

Par contre, si $|J| = 3$, les deux méthodes donnent le même résultat final : $\overline{\rho(\ell^4)} = \widetilde{X}_G$.

IV - ISOTOPIE ET SURFACE DE LANDAU

(Pb1 de l'étude de l'objet $\widetilde{E}_G$ associé au graphe)

Pour les graphes à une boucle, nous possédons maintenant une intégrale de TYPE STANDARD dont la variété polaire $S(t_0)$ et la variété D_0 dans laquelle borde le cycle relatif d'intégration Γ_0 sont, de plus, en position générale pour $t = t_0$.

Notation

Soient T_G , la variété du paramètre du graphe G

X_G , la variété d'intégration maintenant COMPACTE

$\mathfrak{s} = \bigcup_{t \in \Gamma_G} S(t)$, la variété polaire

$D = D_0 \times T_G$, la variété de bordure du cycle

$\mathfrak{s}_1 = \mathfrak{s} \cup D$

$\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{s}$

A partir de quoi l'on forme le fibré filtré en PROJÉTÉS :

$$E_G = \{\mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset X_G \times \{t_0\} \subset \Gamma_G\}$$

appelé objet géométrique propre associé au graphe.

(Ici pour $|J| \geq 4$, les objets $\widetilde{E}_G$ et $\bar{E}_G$ introduits en II.0 sont confondus ; de plus la projection est propre puisque X_G est compacte).

Proposition 1 - Définition

Parmi les chemins de prolongement analytique certain du germe de fonction analytique, défini par l'intégrale, figurent les chemins $\widehat{t_0 t_1}$ "bons pour Γ_0 " relativement à $\mathfrak{s}$ et D [d'après le théorème 1 du premier chapitre I]

Par définition, on appelle variété de LANDAU pour G le complément ; $L = T_G - B_0$, du sous-ensemble de T_G dans lequel tous les chemins issus de t_0 sont bons pour Γ_0 relativement à $\mathfrak{s}$ et D.

Le corollaire du théorème I, chapitre I (ainsi que la proposition 1 chapitre III, paragraphe I) nous disent : $B_0 = T_G - L$ est la composante* d'isotopie ambiante de t_0 pour l'objet associé au graphe

$$\widetilde{E}_G = \{ \mathfrak{s}_0 \subset \mathfrak{s}_1 \subset X_G \times T_G \rightarrow T_G \} .$$

Enfin la fibre de t_0 pour $\widetilde{E}_G$:

$$\widetilde{E}_0 = \{ S(t_0) \subset S(t_0) \cup D_0 \subset X_G \rightarrow t_0 \}$$

est : COMPACTE et "EN POSITION GENERALE", donc le corollaire du théorème 2 d'isotopie nous dit que la variété de Landau* est :

$$L = \{ t \in T_G \mid S(t) \cup D_0 \text{ n'est pas en P.G.} \} \quad]]$$

Le calcul de la variété de Landau : $L \subset T_G$ est donc purement algébrique et très aisé. Précisons-le.

* En réalité, on doit exclure celles des composantes de L qui sont de codimension strictement supérieure à un.

Proposition 2

Soit $n \geq 4$ le nombre de surfaces polaires de notre intégrale sous sa forme standard, (ie si le nombre $|J|$ de lignes internes formant la boucle du graphe est trois, on a $n = 4$; et si $|J| \geq 4$ on a $n = |J|$)

Soit $W(\bar{q})$ la matrice homogène à $(n+7)$ lignes et $(n+1)$ colonnes, écrite ci-dessous et formée à partir des équations dans P^5 , de X_G , des surfaces polaires M_j , et de leur $\bar{q}$ -gradients.

Alors la composante d'isotopie ambiante de t_0 pour $\tilde{E}_G$ est l'ensemble des $t \in T_G$ tels qu'il existe un point de P^5 de coordonnées homogènes

$$\bar{q} = (q, \sigma, \tau) = (q_0, q_1, q_2, q_3, \sigma, \tau) = (q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5) \in \mathbb{C}^6 - \{0\}$$

tel que le rang de la matrice $W(\bar{q})$ soit inférieur ou égal à n .

Si $n \geq 6$ on devra imposer en plus que le point $\bar{q}$ soit sur la sphère $\bar{\Sigma}^4$.

Surfaces	$\bar{\Sigma}^4$	M_1	M_2	M_3	M_n
<u>Matrice</u> $W(\bar{q}) =$	$\frac{1}{2} \bar{q} \cdot \bar{q}$				
		$\bar{t}_1 \cdot \bar{q}$			
			$\bar{t}_2 \cdot \bar{q}$		
				$\bar{t}_3 \cdot \bar{q}$	
					$\bar{t}_n \cdot \bar{q}$
<u>$\bar{q}$-gradient</u>	$\bar{q}$	$\bar{t}_1$	$\bar{t}_2$	$\bar{t}_3$	$\bar{t}_n$

où pour éviter un changement trivial d'axes, on a posé :

$$\bar{p} \cdot \bar{q} = p_0 q_0 + p_1 q_1 + p_3 q_3 - \frac{1}{2} (p_4 q_5 + p_5 q_4)$$

avec

$$\bar{p} \in \bar{P}^5 \quad \bar{q} \in \bar{P}^5$$

$$\bar{q} = (\underline{q}, 0, 1)$$

$$\bar{t}_j = (\underline{a}_j, -(\underline{a}_j^2 + m_j^2), -1)$$

et

$$\bar{t}_4 = (\underline{0}, -1, 0) \quad \text{si} \quad |J| = 3.$$

Preuve

En effet les conditions exprimées sont les conditions de non position générale dans $\bar{P}^5$, de Σ^{-4} , et de $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$.

Si $n \geq 6$ on a exprimé dans l'énoncé que la non position générale avait lieu en un point de $\bar{\Sigma}^4$, donc que $\bar{\Sigma}^4 \cap M_1, \dots, \bar{\Sigma}^4 \cap M_5, \bar{\Sigma}^4 \cap M_n$ n'étaient effectivement pas en position générale.

La non position générale en un point de $\bar{P}^5$ non situé sur $\bar{\Sigma}^4$ équivaut à la non position générale des plans $M_1, \dots, M_n$ entre eux ce qui signifie que l'intersection entre eux de certains de ces plans, est de dimension trop forte, mais si $n = 4$ ou $n = 5$, cette dimension trop forte est toujours supérieure ou égale à un. Cette mauvaise intersection contient donc une droite qui coupe forcément $\bar{\Sigma}^4$ qui est une variété de codimension un ; donc dans ce cas encore $\bar{\Sigma}^4 \cap M_1, \dots, \bar{\Sigma}^4 \cap M_n$ ne seront pas en position générale.]]

Corollaire

La variété de Landau $L \subset T_G$ du graphe G à une boucle composée de $|J| \in \{3, 4, 5\}$ lignes internes, est la réunion des variétés algébriques $L_\beta \subset T_G$ définies par :

$$L_\beta = \{t \in T_G \mid \det_{j,k \in \beta} (\bar{t}_j \cdot \bar{t}_k) = 0\}$$

où $\beta \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$ parcourt les sous-ensembles non vides de $\{1, 2, 3, \dots, n\}$

et où, comme précédemment,

$$\forall j \leq |J|, \quad \bar{t}_j = (\underline{a}_j, -(m_j^2 + a_j^2), -1)$$

$$\text{et, si } |J| = 3, \quad \bar{t}_0 = \bar{t}_4 = (\underline{0}, -1, 0)$$

$$\text{et où } \bar{r} \cdot \bar{s} = \underline{r} \cdot \underline{s} - 1/2(r_4 s_5 + r_5 s_4)$$

de sorte que :

$$\forall j, k \leq |J|, \quad 2 \bar{t}_j \cdot \bar{t}_k = -[m_j^2 + m_k^2 + (\underline{a}_j - \underline{a}_k)^2], \text{ et } \bar{t}_j^2 = -m_j^2$$

(et si $|J| = 3$, $\bar{t}_j \cdot \bar{t}_0 = -1$, $\bar{t}_0^2 = 0$)

Preuve

C'est le résultat que donne l'élimination vraiment très simple de la variable d'intégration $\bar{q}$ dans la matrice précédente.]]

Le résultat est maintenant classique :

par exemple pour $|J| = 4$, ie pour ,

$$L_j \text{ est } 0 = m_j^2$$

$$L_{\{j,k\}} \text{ est } 0 = (\underline{a}_j - \underline{a}_k)^2 + (m_j^2 + m_k^2)$$

$L\{1, 2, 3, 4\}$ est $0 = 12 m^4 + 4m^2 [\underline{a}_2^2 + (\underline{a}_1 - \underline{a}_3)^2] + \underline{a}_2^2(\underline{a}_1 - \underline{a}_3)^2$
 (dans le cas où les masses internes et externes sont toutes égales
 à m).

De même pour $|J| \equiv 3$, ie pour  , il y a, en plus des
 $L\{j\}$, $L\{j,k\}$, $L\{1,2,3\}$, les parties $L\{0,j\}$, $L\{0,j,k\}$, $L\{0,1,2,3\}$
 (où $0 \neq j$, $0 \neq k$, $j < 4$, $k < 4$)

qui se nomment parfois SINGULARITES DE DEUXIEME GENRE,* ou singularité
 "autres que celles de Landau", ou encore singularité relatives à
 l'infini** .

$$0 = \det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m_1^2 & \frac{m_1^2 + m_2^2 + (\underline{a}_1 - \underline{a}_2)^2}{2} & \frac{m_1^2 + m_3^2 + (\underline{a}_1)^2}{2} \\ 1 & \frac{m_1^2 + m_2^2 + (\underline{a}_1 - \underline{a}_2)^2}{2} & m_2^2 & \frac{m_2^2 + m_3^2 + (\underline{a}_2)^2}{2} \\ 1 & \frac{m_1^2 + m_3^2 + \underline{a}_1^2}{2} & \frac{m_2^2 + m_3^2 + \underline{a}_2^2}{2} & m_3^2 \end{vmatrix}$$

$$\text{c'est-à-dire : } (\underline{a}_1 \cdot \underline{a}_2)^2 = (\underline{a}_1^2) \cdot (\underline{a}_2^2)$$

** Parce que l'on ne s'aperçoit aisément de leur existence que lorsque
 l'on prend la peine de compactifier.

* cf. D. B. Fairlie J.M.P.*3, 4, July 1962 .

V - CALCUL DE L'HOMOLOGIE DE LA FIBRE GÉNÉRIQUE $\widetilde{E}_o$ de $\widetilde{E}_G$

(Pb N° 2 de l'Etude de l'objet $\widetilde{E}_G$ associé au graphe G)

V.1 INTERET

- (a) L'opération "intégration en $t = t_o$ " est une application linéaire,

$$\int : H_4^c(X_G - S(t_o), D_o - S(t_o)) \rightarrow \emptyset \quad \Gamma_o \mapsto \int_{\Gamma_o} \frac{\overline{\omega}}{S(t_o)}$$

envoyant dans $\emptyset$ le groupe d'homologie relative compacte de la fibre $\overline{E}_o$ de l'objet $\overline{E}_G$ associé au graphe.

- (b) De plus le premier groupe $\pi_1(T_G - L, t_o)$ d'homotopie de la composante d'isotopie $B(t_o, \overline{E}_G) = T_G - L$ de t_o pour $\overline{E}_G$ est un groupe d'opérateurs linéaires sur les groupes d'homologie de la fibre (Cf. chapitre III, proposition 1).

- (c) Enfin le théorème 1 du chapitre I nous apprend que le prolongement analytique le long d'un lacet de sommet t_o situé dans $B(t_o, \overline{E}_G)$ s'obtient par conjonction des deux opérations (a) et (b) ci-dessous. D'où l'intérêt des problèmes déjà numérotés (Cf. Chapitre III). Ici nous nous occupons du problème N° 2 de calcul des homologies.

V.2 CALCUL DE $H_4^c(X_G - S(t_0))$ Lemme (trivial)

Si $\bar{\Sigma}^4$ est une 4-sphère projective complexe $\bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5$

Si M_j est un 4-hyperplan projectif complexe $M_j \subset \bar{P}^5$

Si $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$

Si la famille $\{\bar{\Sigma}^4, M_j\}_{j \in \{1, 2, \dots, n\}}$ est en Position Générale

Alors, en prenant M_n pour 4-plan de l'infini dans $\bar{P}^5$, on a un

homéomorphisme canonique

entre $\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j$ et $S_n^4 - \bigcup_{j=1}^{n-1} M_j$

où $S_n^4 = \bar{\Sigma}^4 - M_n$ est la 4-sphère affine, partie affine de $\bar{\Sigma}^4$

et où, par abus, on écrit $A - B$ pour $A - (A \cap B)$.]]

Remarque : pour plus de symétrie on pose, pour $\beta \subset \{1, \dots, n\}$,

$$\beta^M = \bigcup_{j \in \beta} M_j \text{ et } \beta = (\{1, 2, \dots, n\} - \beta)$$

d'où un homéomorphisme canonique :

$$\text{entre } \bar{\Sigma}^4 - \beta^M \text{ et } S_i^4 - \beta^M, \text{ ou } S_i^4 = \bar{\Sigma}^4 - M_i.$$

Corollaire 1

Le théorème de décomposition (Chap. IV) s'applique et

donne

$$\left| H_r^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j) = H_r^c(S_n^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j) = \bigoplus_{\alpha \subset \{1, \dots, n-1\}} \delta^\alpha H_{r-|\alpha|}^c({}^\alpha M \cap S_n^4) \right|$$

ou encore

$$H_r^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j) = H_r^c(S_i^4 - \{i\} M) = \bigoplus_{\alpha \subset \{1, 2, \dots, \hat{i}, \dots, n\}} H_{r-|\alpha|}^c({}^\alpha M \cap S_n^4)$$

où
$${}^\alpha M = \bigcap_{j \in \alpha} M_j$$

et où $\alpha \subset \{1, \dots, \hat{i}, \dots, n\} \Leftrightarrow \alpha \subset \{1, 2, \dots, n\}$ et $i \notin \alpha$

Corollaire 2

Pour le graphe , les groupes d'homologie de la fibre $E_0 = [\emptyset \subset S(t_0) \subset X_G \rightarrow t_0]$ sont

$$H_*^c(X_G - S(t_0)) = H_*^c(\bar{\Sigma}^4 - M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4) = (0, 1^3, 2^3, 3^1, 4^8)$$

dès que le paramètre $t \notin L$ n'appartient pas à la variété de Landau (car alors il y a position générale) ;

où 4^8 signifie que $H_4^c(X_G - S(t_0)) = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{8 \text{ fois}},$

ie que le groupe d'homologie en dimension quatre est le groupe abélien libre sur une base de huit éléments.

Preuve

Il suffit de remarquer :

- 1°) que la sphère complexe de dimension p admet une rétraction par déformation sur la sphère "réelle" de même dimension ;
- 2°) que l'homologie de la p -sphère réelle, $S_p^{\mathbb{R}}$ est $H^c(S^p) = (0^1, p^1)$.
- 3°) que ${}^\alpha M \cap S^4$ est la $(4 - |\alpha|)$ -sphère complexe dont une rétraction est la $(4 - |\alpha|)$ -sphère "réelle" e^α que nous allons décrire.]]

Remarque : pour les autres graphes à une boucle mais à $|J|$ côtés, un calcul facile montre que $H_4^c(X_G - S(t_0))$ est un groupe abélien dont le nombre h d'éléments de base est donné ci-après :

$ J $	=	4	5	6	7	8
h	=	8	17	36	72	134

$$h = 2 - 17/6J + 29/12J^2 - 2/3J^3 + 1/12J^4. \quad]]$$

VI - RELATIONS LINEAIRES ENTRE LES DIVERSES PARTIES ABSORPTIVES

Définition des sphères évanouissantes et des cycles évanouissants.

Faisons choix une fois pour toutes d'une métrique riemannienne sur $\bar{\Sigma}^4$ (considérée comme variété différentiable compacte).

Si $t \notin L$, les surfaces $\{\bar{\Sigma}^4, M_1, \dots, M_n\}$ sont en position générale et alors pour tout $\beta \subset \{1, 2, 3, \dots, n\}$, l'intersection ${}^\beta_M \cap \bar{\Sigma}^4$ est une $(4 - |\beta|)$ -sphère projective complexe et donc, si $i \notin \beta$, $({}^\beta_M \cap \bar{\Sigma}^4) \setminus M_i$ est une sphère affine complexe ${}^\beta_M \cap S_i^4$ de dimension $(4 - |\beta|)$ qui admet donc une rétraction par déformation sur une variété difféomorphe à une $(4 - |\beta|)$ - sphère réelle et que de plus nous pouvons toujours supposer de grosseur minimale parmi de telles sphères traçables sur $({}^\beta_M \cap \bar{\Sigma}^4) \setminus M_i$ [et même, si t est bien choisie, minimale parmi celles traçables sur ${}^\beta_M \cap \bar{\Sigma}^4$] et que l'on appelle alors après J. Leray la sphère évanouissante $e_i^\beta(t)$ (ou, $e^\beta(t)$ si aucune confusion n'est à craindre). Une fois canoniquement orientée, $e_i^\beta(t)$ peut être considérée comme un cycle de $H_{4-|\beta|}^c({}^\beta_M \cap S_i^4)$ et se nomme cycle évanouissant.

On supposera que la métrique a été choisie telle que lorsque β est vide la 4-sphère $\underline{e}_n^\beta$ soit la partie réelle de $\bar{\Sigma}^4$, i.e.

$$\underline{e}_n^\emptyset = \mathbb{R}_e \bar{\Sigma}^4.$$

Proposition 3

Si $t_2 \in L$ est un point régulier de L , alors :

- (a) Il existe un et un seul $\beta \in \{1, 2, \dots, n\}$ tel que $t_2 \in L_\beta$
- (b) t_2 est régulier dans L_β
- (c) lorsque $t \notin L$ tend vers t_2 , la sphère évanouissante $e^\beta(t)$ se réduit effectivement à un seul point.
- (c') la sphère projective ${}^\beta M \cap \bar{\Sigma}^4$ devient un cône projectif.

Preuve

Ceci se déduit du corollaire de la proposition 2]].

Remarque : Le fait que t_2 non seulement appartienne à un seul L_β mais qu'il soit régulier dans ce L_β est essentiel à l'évanouissement de $e^\beta(t)$ comme le montre le cas où deux plans M_j et M_k viennent se confondre.

(Cf. le corollaire 2 : tout point $t_3 \in T$ tel que $\underline{a}_j = \underline{a}_k$ et $m_j = m_k$ est singulier dans $L_{\{j,k\}}$)

Choix d'une base de $H_4^c(X_G - S(t_0))$

Rapelons que le théorème de décomposition donne un isomorphisme qui n'est pas canonique.

Cette non canonicité est due au fait que dans la suite exacte courbe suivante (cf. chapitre IV et III), la projection p n'admet pas de relèvement privilégié :

$$\xrightarrow{\alpha} H_{r-1}^c(\bar{\Sigma}^3 - \bigcup_{j=1}^v M_j) \xrightarrow{\delta} H_r^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^{v+1} M_j) \xrightarrow{p} H_r^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^v M_j) \xrightarrow{\alpha}$$

où $\bar{\Sigma}^3 = \bar{\Sigma}^4 \cap M_{v+1}$.

D'où la nécessité d'un choix d'une base spécifique de

$$H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j)$$

Pour cela on choisit une fois pour toutes $t_0 \in T - L$ tel que les sphères évanouissantes $e^\beta(t_0)$ soient toutes disjointes lorsque β parcourt les parties de $\{1, 2, \dots, n\}$.

Alors le cycle évanouissant $e^\beta(t_0)$ de $H_{4-|\beta|}^c(\beta M \cap S_i^4)$ donne, par cobord itéré, le cycle $\delta^\beta e^\beta(t_0)$ de $H_4^c(S_i^4 - \beta M)$ dont un représentant est dans un voisinage aussi petit que l'on veut de $e^\beta(t_0)$ et est donc situé dans $\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j$, par notre choix de t_0 ; on peut donc considérer ce représentant particulier comme cycle $e_\beta(t_0)$ de l'espace $\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j$ et, ce faisant, on effectue un relèvement particulier de p . On désigne par $\underline{e}_\beta(t_0)$, ou plus simplement par $\underline{e}_\beta$, la classe* ainsi obtenue dans $H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j)$.

Ainsi, le corollaire du lemme donne immédiatement :

* convention dans le cas de sphères de dimension nulle lorsque $|\beta| = 4$, alors la sphère évanouissante $e^\beta(t)$ est formée de deux points, chacun d'eux donnant une classe dans $H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j)$ par la construction précédente. Nous continuerons à noter cet ensemble de deux classes par $\underline{e}_\beta(t_0)$ i. e. $\underline{e}_\beta(t_0) = \{\underline{e}'_\beta(t_0), \underline{e}''_\beta(t_0)\}$ si $|\beta| = 4$

Proposition 4

$t_0 \in T - L$ étant encore choisi comme précédemment,

- (a) Lorsque $\beta \subset \{1, 2, \dots, n\}$ parcourt toutes les parties de cet ensemble, la réunion des classes

$$e_\beta(t_0) \in H_4^c(X_G - R(t_0)) = H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=1}^n M_j)$$

forme un ensemble de générateurs NON INDEPENDANTS de cette homologie

- (b) Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ l'ensemble

$$N_i = \{e_\alpha(t_0) \mid i \notin \alpha \text{ et } |\alpha| \leq 4\}$$

forme une base

(si $|\alpha| = 4$, $\{e_\alpha(t_0)\} = \{e'_\alpha(t_0), e''_\alpha(t_0)\}$ est un ensemble à deux éléments)

$$(c) \bigcap_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} N_i = e_\emptyset = (R_e \bar{\Sigma}^4) = e_\emptyset$$

- (d) $e_\emptyset$ n'est pas combinaison linéaire des $e_\beta(t_0)$ où β n'est pas vide. $\square$

Corollaire (Relations entre parties absorptives)

- (e) Si $i \in \beta$, alors le cycle $e_\beta(t_0) \in H_4^c(X_G - S(t_0))$

s'écrit de façon unique comme combinaison linéaires à coefficients entiers positifs ou négatifs des éléments $e_\alpha(t_0) \in N_i$

TELS QUE α N'EST PAS VIDE.

$i \in \beta \Rightarrow e_\beta(t_0) = \sum_{\substack{i \notin \alpha \\ \alpha \neq \emptyset}} n_\alpha \cdot e_\alpha(t_0)$ $n_\alpha \in \mathbb{Z} \text{ unique}$

- (f) Les germes en t_0 , des fonctions analytiques associées à l'intégrant du graphe et aux $\underline{e}_\beta(t_0)$:

$$\underline{e}_\beta(t_0) \int \omega_G$$

sont reliés par les mêmes relations linéaires qu'en (e) .

- (g) Les fonctions holomorphes (mais ramifiées) correspondantes, (qui sont de toute évidence définies sur $T - L$), et leurs combinaisons linéaires entières que l'on nomme "parties absorptives" de la fonction de Feynman (pour des raisons que nous verrons plus loin), sont reliées par les mêmes relations qu'en (e) et (f) :

Preuve

Il est évident que $((a) + (b) + (c)) \Rightarrow (d)$ et puis que $((b) + (d)) \Rightarrow (e)$; le reste suit.]]

Utilisation de la formule des résidus

$$\underline{e}_\beta(t_0) \int \omega_G = \underline{e}^\beta(t_0) \int \text{res}^\beta(\omega_G)$$

$$\text{donc } \underline{e}_\beta(t_0) = \sum n_\alpha \underline{e}_\alpha(t_0)$$

entraîne

$$\boxed{\underline{e}_\beta(t_0) \int \omega_G = \sum n_\alpha \underline{e}^\alpha(t_0) \int \text{res}^\alpha(\omega_G)}$$

VII - ACTION DU GROUPE D'OPERATEURS $\pi_1(T - L; t_0)$ SUR L'HOMO-

LOGIE DE LA FIBRE $\widetilde{E}_0$ EN t_0 DE $\widetilde{E}_G$

APPLICATION DE LA FORMULE DE PICARD - LEFSCHETZ

REGLES DE CUTKOSKY

CAS EXPLICITE DU GRAPHE CARRE



(Ici nous donnons une solution partielle du problème n° 4)

L'appendice A fournit une description du groupe d'homotopie de $\pi_1(T - L; t_0)$, et nous dit qu'il est engendré par les lacets élémentaires définis par t_0 et les points réguliers $y \in L$.

La proposition 3 nous apprend qu'un tel point régulier appartient à un et un seul L_β et que lorsqu'on en approche par $t \in T - L$, la fibre polaire reste homéomorphe à elle même puis finit par acquérir au point $t = y$ une (et une seule) singularité ponctuelle quadratique, pour lequel la sphère évanouissante $e^\beta(t)$ tend vers un point de la fibre de y .

Alors la formule de Picard-Lefschetz-Leray (cf. chap. V, § III) est applicable et donne dans ce cas l'automorphisme

$$\phi_q^\beta : H_q^c(X_G - S(t_0)) \rightarrow H_q^c(X_G - S(t_0))$$

correspondant à ce lacet élémentaire autour de L_β .

Cette formule est

1. Si $q \neq 4$ ($= \dim X_G$) ou si $q = 4$ et $|\beta| = 5$

alors $\phi_q^\beta = \text{identité} : H_q^c(X_G - S(t_0)) \rightarrow H_q^c(X_G - S(t_0))$

2. Si $|\beta| \neq 5$

$$\phi_4^\beta : h_4(X - S(t_0)) \mapsto h_4(X - S(t_0)) + n \underline{e}_\beta(t_0)$$

où

$$n = (-1)^{\frac{(4-|\beta|+1)(4-|\beta|+2)}{2}} K I [h_4(X_G - \beta^M(t_0)), e_{,\beta}]$$

où $K I$ est l'indice de Kroneker (cf Appendice B-5) et où

$$e_{,\beta}(t_0) = \partial^{-|\beta|} e^\beta(t_0, y) \in H_4^c(X_G, \bigcup_{j=1}^n M) .$$

Conclusion

Comme seules les $e^\beta(t_0)$ correspondant à β non vide peuvent s'évanouir (car $\text{Re } \bar{\Sigma}^4$ reste fixe lorsque t varie), la formule de Picard-Lefschetz-Leray montre la proposition suivante :

Proposition 5

(a) L'action du groupe d'homotopie de la base (T-L)

1. est triviale sur $H_q^c(X_G - S(t_0))$ si $q \leq 3$

2. est triviale sur $H_4^c(X_G - S(t_0)) / (\underline{e}_{\beta}(t_0))_{\beta \text{ non vide}} .$

(b) Plus spécifiquement, un lacet élémentaire autour de L_β , accroît un 4-cycle de $X_G - S(t_0)$ d'un multiple de $\underline{e}_\beta(t_0)$ ($\beta \neq \emptyset$)]]

Corollaire

Par suite, la variation (ou partie absorptive) de l'intégrale de Feynman après continuation analytique le long d'un lacet élémentaire autour de L_β est un multiple de

$$\boxed{\int_{e_\beta(t_0)} \omega_G = \int_{e^\beta(t_0)} \text{res}^\beta \omega_G}$$

On a ainsi obtenu les règles de Cutkosky : après un tour autour de L_β , la discontinuité (ou partie absorptive) est une intégrale sur un cycle compact de l'intersection des surfaces polaires de l'intégrant initial ; ces cycles sont de dimension inférieures et des fonctions δ apparaissent.]]

Evidemment, il reste un problème géométrique à résoudre c'est celui du calcul de l'intersection n . Nous le traiterons explicitement pour le graphe carré  .

VIII - CAS EXPLICITE DU GRAPHE CARRE

1. EXPLICATION DES FIGURES

On représente un point complexe de $\mathcal{C}^n$ par un vecteur dans $\mathbb{R}^n$ dont l'origine est la partie réelle du point et l'amplitude est la partie imaginaire du point.

La figure 1 représente la situation pour $t = t_0$ projetée sur l'intersection à deux dimensions $x_0 = x_1 = x_2 = 0$ de l'espace complexe numérique de dimension cinq: $x = (\underline{x}, x_4) \in \mathcal{C}^5$.

L'axe x_4 est choisi vertical.

On prend pour équation de Σ^4 : $\Sigma^4 \equiv \underline{x}^2 + x_4^2 - 1 = 0$ et Σ^4 est la sphère (complexe) unité contrée à l'origine.

La figure 2 représente la situation à t_0 , de la projection parallèle à x_4 et x_0 sur le plan tangent (horizontal) de Σ^4 au point $A = (\underline{0}, 1)$ de l'espace $\mathcal{C}^5 \ni x = (\underline{x}, x_4)$.
C'est donc une image tridimensionnelle.

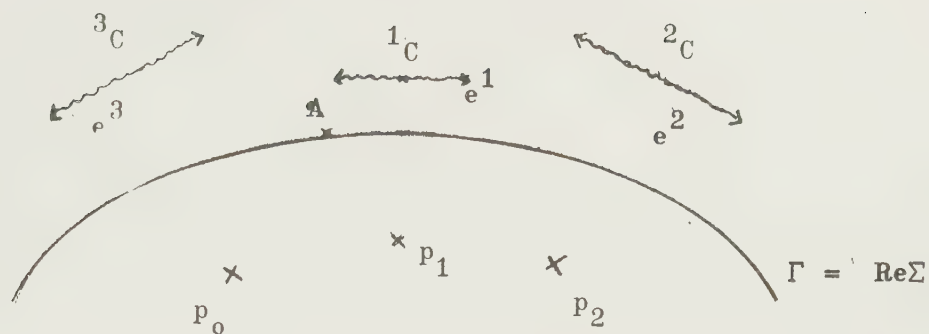
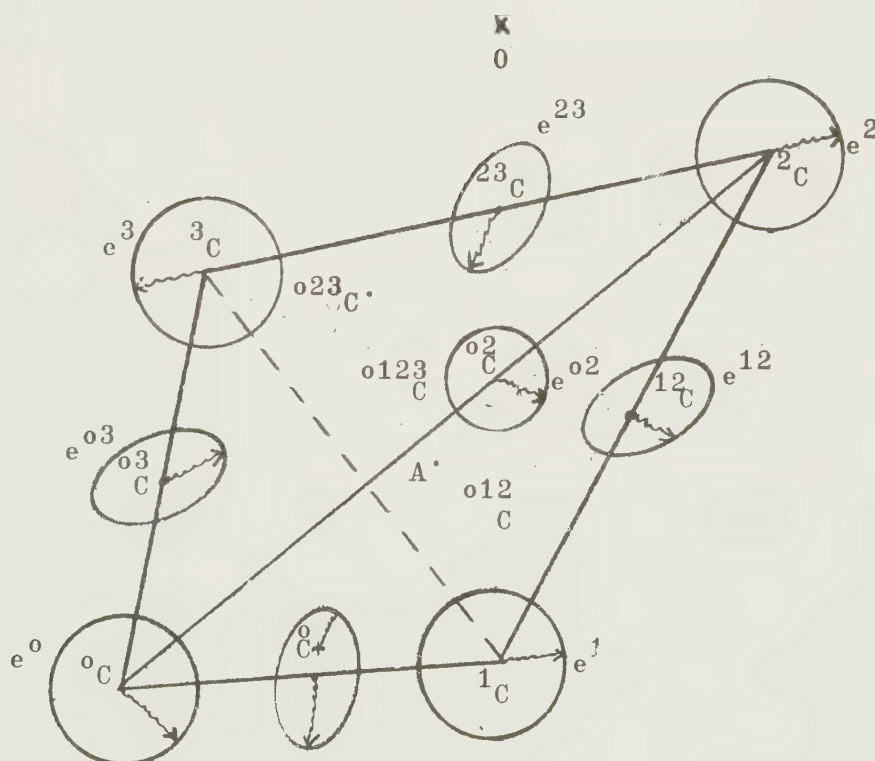


FIGURE 1



- $h = \Gamma = \text{Re}\Sigma^4 = \underline{e}_\emptyset = \underline{e}^\emptyset$ est assimilé à son plan tangent dans $A = {}^{o123}_C$, et est constitué des points réels de notre représentation.
- On n'a représenté qu'un seul vecteur par surface principale ($|\beta| = 1$ ou 2)

FIGURE 2

Notations

Comme ensemble d'indices, au lieu de $\{1, 2, 3, 4\} \supset \beta$ nous prenons $\{1, 2, 3, 0\} \supset \beta$, et ainsi nos hyperplans de $\mathbb{C}^5$ sont étiquetés :

$$M_0 \equiv p_0 \cdot x - 1 = 0$$

$$M_1 \equiv p_1 \cdot x - 1 = 0$$

$$M_2 \equiv p_2 \cdot x - 1 = 0$$

$$M_3 \equiv p_3 \cdot x - 1 = 0$$

$$\text{où } p_j = \frac{-2}{a_j^2 + m_j^2 + 1} \frac{1}{2} \quad (2a_j, a_j^2 + m_j^2 - 1)$$

Le cycle initial d'intégration est $\Gamma = \text{Re } \Sigma^4$

$$\text{où } \Sigma^4 \equiv x^2 - 1 = 0$$

2. CHOIX DU POINT BASE t_0 DU GROUPE D'HOMOTOPIE $\pi_1(T - L ; t_0)$

Nous prenons pour t_0 le point défini par :

$$\underline{a}_0 = (-\eta, 0 ; 0, 0)$$

$$\underline{a}_1 = (0, -\eta, 0, 0)$$

$$\underline{a}_2 = (0, 0, -\eta, 0)$$

$$\underline{a}_3 = (0, 0, 0, -\eta)$$

$$m_0^2 = m_1^2 = m_2^2 = m_3^2 = \delta$$

avec

$$1 \gg \eta \gg \delta > 0$$

On remarque que

- (1) $t_0 \in T - L$
- (2) t_0 vérifie l'hypothèse de la proposition 4
- (3) $p_j = (p_j, p_{j_4})$ est tel que, au voisinage de t_0 ,
 $p_j \sim -2 \underline{x}_j$ et $p_{j_4} \sim 1 - 2 \eta^2$ et $\|p_j\| < 1$
- (4) $p_j(t_0)$ est le vecteur unitaire de l'axe x_4 .
- (5) Les centres ${}^jC$ des sphères évanouissantes e^j forment un polyèdre régulier réel $({}^0C, {}^1C, {}^2C, {}^3C)$.
 Le centre ${}^\beta C$ de e^β est le barycentre de la face $({}^jC)_{j \in \beta}$ de ce polyèdre.
- (6) ${}^jC$ est homothétique de p_j , c'est-à-dire ${}^jC = \lambda p_j$ et $\lambda \simeq 1$ $\lambda > 1$
- (7) Il est équivalent de prendre comme paramètre
 $s = (p_j, p_{j_4})_{j \in \{0,1,2,3\}}$ ou $t = (\underline{a}_j, m_j^2)_{j \in \{0,1,2,3\}}$
- (8) Une base de l'homologie de $\Pi_4^c(\bar{\Sigma}^4 - \bigcup_{j=0}^3 M_j)$ est donnée par la famille $\underline{e}_\alpha = \delta^\alpha e^\alpha$ $\alpha \subset \{1, 2, 3\}$

3. CHOIX D'UN LACET ELEMENTAIRE PAR L_β

Pour chaque β , nous examinerons qu'un seul lacet élémentaire, c'est-à-dire qu'une seule des composantes connexes par arc de $L_\beta = (\bar{L} - \bigcup \bar{L})$. (cf. Appendice C).

On sait que par β , il y a une seule sphère évanouissante $e^\beta(t_0)$, par contre choisir un lacet élémentaire $\alpha(y)$ équivaut à choisir un point $y_\beta \in L_\beta$ et équivaut à choisir une bonne localisation W ou encore équivaut à choisir un relèvement $e_{,\beta}(t_0 y)$.

Nous explicitons ici notre choix des y_β en exhibant la composante non nulle de $(t_0 - y_\beta)$.

Pour cela nous utilisons la notation matricielle

$$\|b_{\mu\nu}\| \quad \mu, \nu \in \beta \quad b_{\mu\nu} = \nu^{\text{ième}} \text{ composante de } \underline{a}_\mu(t_0) - \underline{a}_\mu(y_\beta) \quad \text{et}$$

$$\Delta m_\beta^2 = m_\mu^2(t_0) - m_\mu^2(y_\beta) \quad \forall \mu \in \beta$$

Alors le choix de y_β est

$$y_j \in L_j \quad \text{ie } \beta = \{j\} \text{ tel que } \|b_{jj}\| = 0 \quad \Delta m_j^2 = \delta$$

$$y_{jk} \in L_{jk} \quad \text{ie } \beta = \{j, k\} \text{ t.q. } \|b_{\mu\nu}\| = \frac{\eta + i\varepsilon}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ +1 & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta m_\beta^2 = \delta - \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$y_{ijk} \in L_{ijk} \quad \text{ie } \beta = \{i, j, k\} \text{ t.q. } \|b_{\mu\nu}\| = \frac{\eta + i\varepsilon}{3} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad \Delta m_\beta^2 = \delta - \frac{2\varepsilon^2}{3}$$

$$y_{0123} \in L_{0123} \quad \text{ie } \beta = \{0, 1, 2, 3\} \text{ t.q. } \|b_{\mu\nu}\| = \frac{\eta + i\varepsilon}{4} \begin{vmatrix} -3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} \quad \Delta m_\beta^2 = \delta - \frac{3}{4} \varepsilon^2$$

Remarque alors :

$$\text{pour } t_0 \text{ on a } p_0 = \frac{1}{1+\eta^2} (2\eta, 0, 0, 0) \quad \text{et } m_0^2 = \delta$$

$$\text{pour } y_0 \text{ on a } p_0 = \frac{1}{1+\eta^2} (0, 0, 0, 0) \quad \text{et } m_0^2 = 0$$

$$\text{pour } y_{01} \text{ on a } p_0 = \frac{2}{2+\eta^2} (\eta - i\varepsilon, +i\varepsilon, 0, 0) \quad \text{et } m_0^2 = \frac{\varepsilon^2}{2}$$

$$\text{pour } y_{012} \text{ on a } p_0 = \frac{3}{3+\eta^2} (2 \frac{\eta - 2i\varepsilon}{3}, 2 \frac{\eta + i\varepsilon}{3}, 2 \frac{\eta + i\varepsilon}{3}, 0) \quad \text{et } m_0^2 = \frac{2}{3} \varepsilon^2$$

$$\text{pour } y_{0123} \text{ on a } p_0 = \frac{4}{4+\eta^2} (\frac{\eta - 3i\varepsilon}{2}, \frac{\eta + i\varepsilon}{2}, \frac{\eta + i\varepsilon}{2}, \frac{\eta + i\varepsilon}{2}) \quad \text{et } m_0^2 = \frac{3}{4} \varepsilon^2$$

4. LES ORIENTATIONS

Nous venons de choisir pour tout β un y_β , donc un e, β .
 e, β est une cellule de dimension 4 dans Σ^4 . Nous lui donnons l'orientation naturelle, ie celle induite par l'orientation de la variété analytique donc canoniquement orientée par

$$\text{Re } x_0 \wedge \text{Im } x_0 \wedge \text{Re } x_1 \wedge \text{Im } x_1 \wedge \text{Re } x_2 \wedge \text{Im } x_2 \wedge \text{Re } x_3 \wedge \text{Im } x_3$$

e, β une fois orientée donne automatiquement les orientations de

e^β par la formule $e^\beta = \partial |\beta| e, \beta$ et de

$\underline{e}_\beta$ par la formule $\underline{e}_\beta = \delta^\beta e^\beta$.

5. LE TABLEAU DES INDICES DE KRONECKER

Correspondant au choix que nous venons de faire, voici le tableau des indices de Kronecker :

$$| \langle \underline{e}_\gamma \mid e, \beta \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma \neq \beta \\ 1 & \text{si } \gamma < \beta \text{ strictement} \\ 2 & \text{si } \gamma = \beta \text{ et } |\beta| \text{ pair} \\ 0 & \text{si } \gamma = \beta \text{ et } |\beta| \text{ impair} \end{cases}$$

$$| \langle h \mid e, \beta \rangle = 1 \text{ en accord avec } \gamma = \emptyset < \beta \quad \forall \beta \neq \emptyset$$

Le tableau complet avec signe des indices est :

KI	e, i	e, ij	e, ijk	$e, 0123$
h	1	1	1	1
$\underline{e}_i$	0	1	1	1
$\underline{e}_{ij}$	0	-2	-1	-1
$\underline{e}_{ijk}$	0	0	0	-1
$\underline{e}_{0123}$	0	0	0	+2

Remarque : comme la dimension de ces cycles est paire (à savoir 4)
l'ordre des facteurs ne joue pas, ie

$$\langle \underline{e}_\gamma \mid e, \beta \rangle = KI(\underline{e}_\gamma \mid e, \beta) = KI(e, \beta \mid \underline{e}_\gamma)$$

6. RELATIONS ENTRE PARTIES ABSORPTIVES :

Expression des $\underline{e}_\beta(t_o y)$ dans la base des $\underline{e}_\alpha \alpha \in \{1 \ 2 \ 3\}$

Méthode : Passer par l'intermédiaire d'un dual :

Soit E et E^* deux εV de dimension finie en dualité
par la forme bilinéaire $\langle \mid \rangle$.

Soit $x_j \ j \in J$ une base de E

$$\text{ie } \langle x^k \mid x_j \rangle = \delta_{jk}$$

$x^k \ k \in J$ la base duale de E^*

Soit $x = \sum_j X^j x_j$ un élément de E

$$\text{alors } \langle x^k \mid x \rangle = X^k$$

Soit $x^* = \sum_k X_k x^k$ un élément de E^*

$$\text{alors } \langle x^* \mid x_j \rangle = X_j$$

Application : On prend
$$\left\{ \begin{array}{l} E = H_*^c(\bar{\Sigma}^4, {}_3M) \otimes \mathbb{C} \\ \text{(pour } t = t_0) \text{ et} \\ E^* = H_*^c(\bar{\Sigma}^4 - {}_3M) \otimes \mathbb{C} \end{array} \right.$$

- (1) L'indice de Kronecker nous met ces espaces en dualité ; en effet on a

$$H_*^c(\bar{\Sigma}^4 - {}_3M) = H_*^c(\bar{\Sigma}^4 - {}_3M)$$

(puisque tout cycle fermé dans $\bar{\Sigma}^4$ est compact comme $\bar{\Sigma}^4$) .

- (2) Nous possédons une base de E^* à savoir $\{\underline{e}_\alpha\}$

dont les huit éléments sont $\{ h \underline{e}_1 \underline{e}_2 \underline{e}_3 \underline{e}_{13} \underline{e}_{23} \underline{e}_{123} \}$

- (3) Calcul de la base duale $\{\alpha e\}$ dans E de la base $\{\underline{e}_\alpha\}$ dans E^* :

ce calcul se fait en utilisant la table des indices de Kronecker donnée en 1,5.

Les huit éléments de la base duale

$$\{\alpha e\} = \{ h e, {}^1 e, {}^2 e, {}^3 e, {}^{12} e, {}^{13} e, {}^{23} e, {}^{123} e \}$$

sont

$$\left\{ \begin{array}{l} h e = e, 0 \\ j e = (e, 0j) - (e, 0) \quad \forall j \in \{1, 2, 3\} \\ jk e = (e, 0jk) - (e, jk) \quad \forall j, k \in \{1, 2, 3\} \quad j \neq k \\ {}^{123} e = (e, 123) - (e, 0123) \end{array} \right.$$

- (4) Expression des $\{\underline{e}_\beta \mid 0 \in \beta\}$ dans la base des $\underline{e}_\alpha \mid \alpha \subset \{123\}$

Pour tout α , on calcule $\langle \underline{e}_\beta \mid \alpha e \rangle$ en se servant du tableau des KI et du tableau ci-dessus.

On trouve

	h_e	j_e	jk_e	123_e
$\underline{e}_o$	0	1	1	-1
$\underline{e}_{oj}$	0	-2	-1	+1
$\underline{e}_{ojk}$	0	0	0	+1
$\underline{e}_{o123}$	0	0	0	-2

puis on se sert de

$$\underline{e}_\beta = \sum_{\alpha} \langle \underline{e}_\beta | \alpha_e \rangle \alpha_e \quad \alpha \in \{1, 2, 3\}$$

pour obtenir finalement les relations

$$(R_1) \quad \begin{cases} \underline{e}_o &= \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_{23} - \underline{e}_{123} \\ \underline{e}_{oj} &= -2\underline{e}_j - \underline{e}_{jk} + \underline{e}_{jm} + \underline{e}_{123} \quad \{j, k, m\} = \{1, 2, 3\} \\ \underline{e}_{ojk} &= \underline{e}_{123} \\ \underline{e}_{o123} &= -2\underline{e}_{123} \end{cases}$$

(5) Expression des $\{e, \beta\}$ dans la base $\{\alpha_e\}$ de E

Lire l'indice KI ie $\langle \underline{e}_\alpha | e, \beta \rangle$ puis employer

$$\text{la formule } e, \beta = \sum_{\alpha} \langle \underline{e}_\alpha | e, \beta \rangle \alpha_e$$

d'où les relations

$$(R_2) \quad \begin{cases} e, o &= h_e \\ e, j &= h_e \\ e, jj &= h_e + j_e \\ e, ij &= h_e + i_e - j_e - 2 \, ij_e \\ e, ojk &= h_e + j_e + k_e - jk_e \\ e, 123 &= h_e + 1_e + 2_e + 3_e - 12_e - 13_e - 23_e \\ e, o123 &= h_e + 1_e + 2_e + 3_e - 12_e - 13_e - 23_e - 123_e \end{cases}$$

7. LES LACETS ELEMENTAIRES $\alpha(y_\beta)$ CONSIDERES COMME OPERATEURS
SUR $H_*^c(\Sigma^4 - {}_3M)$

La formule Picard-Lefschetz donne

$$\text{Var}_\beta h_4 = n, \beta \underline{e}_\beta$$

$$\text{où } n = (-1)^{\frac{(5-|\beta|)(6-|\beta|)}{2}} \langle h \mid e, \beta \rangle = \varepsilon \langle h_4 \mid e, \beta \rangle$$

Ainsi la matrices des KI se transforme en celle des n (par multiplication des lignes par $\varepsilon = (+, +, -, -1)$)

n	e, i	e, ij	e, ijk	$e, 0123$
h	1	1	-1	-1
$\underline{e}_i$	0	1	1	1
$\underline{e}_{ij}$	0	-2	-1	-1
$\underline{e}_{ijk}$	0	0	0	-1
$\underline{e}_{0123}$	0	0	0	+2

$$\text{où } \{i \ j \ k\} = \{1 \ 2 \ 3\}$$

Dans la base ordonnée : $\{h \ \underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \ \underline{e}_3 \ \underline{e}_{12} \ \underline{e}_{13} \ \underline{e}_{23} \ \underline{e}_{123}\}$

La matrice Var de variation correspondant à chaque lacet élémentaire $\alpha(y)$ $y \in L$ est alors donnée (grâce au tableau des n et à celui des relations (R_1)) par :

Pour $|\beta| = 1$

$$\text{Var } y_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \bigcirc \quad \text{Var } y_0 = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix} \bigcirc$$

Pour $|\beta| = 2$

$$\text{Var } y_{12} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \bigcirc \quad \text{Var } y_{01} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bigcirc$$

Pour $|\beta| = 3$

$$\text{Var } y_{0jk} = \text{Var } y_{123} = \begin{vmatrix} & & & & & & & \bigcirc \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Pour $|\beta| = 4$

$$\text{Var } y_{0123} = \begin{vmatrix} & & & & & & & \bigcirc \\ 2 & -2 & -2 & -2 & & 2 & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

Remarque : $\alpha^2(y_{12}) = 1$

8. CONCLUSION

Nous n'avons pas donné une description complète de la surface de Riemann correspondant à l'intégrale de Feynman du graphe carré à une boucle.

On n'a pas vérifié si les 15 matrices exhibées forment une

base pour $\pi_1(T - L ; t_0)$. Mais nous avons montré ce que devient le groupe $H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - {}_3M)$ sous l'action du sous groupe de $\pi_1(T - L ; t_0)$ engendré par les 15 lacets élémentaires $\alpha(y_\beta)$.

Problème de la transitivité

$H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - {}_3M(t_0))$ possède un cycle particulier $h = \text{Re } \bar{\Sigma}^4$: la partie réelle de $\bar{\Sigma}^4$.

Proposition

Prenons pour base de $H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - {}_3M(t_0))$ une base dont h soit un élément ; par exemple

$$\{h, e_1, e_2, e_3, e_{12}, e_{13}, e_{23}, e_{123}\}$$

Alors si Γ est un cycle dont la composante suivant h est l'unité, il existe un lacet de $(T - L ; t_0)$ qui transforme h en Γ .

En effet, on a alors

$$\Gamma = h + r^1 e_1 + r^2 e_2 + r^3 e_3 + r^{12} e_{12} + r^{13} e_{13} + r^{23} e_{23} + r^{123} e_{123}$$

mais le lacet

$$(\alpha(y_1))^{r^1} \circ (\alpha(y_2))^{r^2} \circ (\alpha(y_3))^{r^3} \circ (\alpha(y_{12}))^{r^{12}} \circ (\alpha(y_{13}))^{r^{13}} \circ (\alpha(y_{23}))^{r^{23}} \circ (\alpha(y_{123}))^{-r^{123}}$$

envoie précisément h sur Γ

]]

Remarque : Par contre, comme il a déjà été observé, si Λ est un lacet quelconque et si C est un cycle quelconque, alors ΛC et C ont même composante suivant h .

Problème de la relevance

Définition

Le lacet Λ est irrélevant pour le cycle C si C appartient au noyau de $\text{Var}(\Lambda)$.

[Evidemment $\Lambda \in \pi_1(T - L; t_0)$ et $C = C(t_0) \in H_4^c(\bar{\Sigma}^4 - {}_3M(t_0))$]

Alors le germe en t_0 de la fonction analytique $\int_{C(t_0)} \omega_G$ coïncide avec celui de son prolongement le long de Λ .

Soit t_φ le point physique initial, alors le problème de la relevance consiste à trouver quels sont les lacets élémentaires Λ_φ d'origine t_φ tel que $\Lambda_o = \overrightarrow{t_\varphi t_o} \circ \Lambda_\varphi \circ \overrightarrow{t_o t_\varphi}$ soit irrelevant pour $h = \text{Re } \Sigma^4$.

Remarque : $\text{Ker Var}(y_{0123}) = \{\Gamma | r^1 + r^2 + r^3 - r^{12} - r^{13} - r^{23} - r^{123} = 1\}$

où $\Gamma = h + r^\alpha \underline{e}_\alpha$ $\alpha \subset \{1, 2, 3\}$ et $\alpha \neq \emptyset$.

autrement dit, les fonctions correspondant à ces cycles Γ restent uniformes sur le chemin élémentaire $\alpha(y_{0123})$ (bien particulier) bien que celui-ci fasse le tour de la surface "principale" L_{0123} de singularité du graphe carré.

Partie absorptive

La présente étude a un peu détaillé la conclusion des propositions 4 et 5 et de leur corollaires.

A tout lacet Λ autour de la surface L de Landau est attachée la

différence entre le germe final en t_0 et le germe initial en t_0 de l'intégrale de Feynman, cette différence ou partie absorptive n'a évidemment pas d'autres surfaces singulières que L et possède la propriété qu'elle ne peut jamais redonner l'intégrale de Feynman par le même procédé.

En effet, la partie absorptive $A(\Delta)$ est l'intégrale

$A(\Delta) = \int_{\text{Var}(\Delta)_h} \omega_G$ mais, d'après ce qu'on vient de voir, $\text{Var}(\Delta)_h$ est pris dans l'espace vectoriel engendré par les e_α tels que $\alpha \subset \{1, 2, 3\}$ et $\alpha \neq \emptyset$.]]

De plus, l'usage de la formule des résidus éclaire ce que nous avons dit (proposition 5 et corollaire) sur les règles de Cutkosky : la partie absorptive $A(\Delta)$ s'écrit en effet :

$$A(\Delta) = \sum_{\alpha} n_{\alpha} \int_{e_{\alpha}} \omega_G = \sum_{\alpha} (2\pi i)^{|\alpha|} n_{\alpha} \int_{e_{\alpha}} \text{res}^{\alpha} \omega_G$$

la dimension du cycle d'intégration diminue et des fonctions δ apparaissent.

Par exemple

$$\int_{e^{123}} \text{res}^{123} \left[\frac{\bar{\omega}}{\pi_0 \pi_1 \pi_2 \pi_3} \right] = \int_{e^{123}} \left[\frac{\bar{\omega}}{d\pi_1 \wedge d\pi_2 \wedge d\pi_3} \right] \cdot \pi_0$$

et

$$\int_{e^{0123}} \text{res}^{0123} \left[\frac{\bar{\omega}}{\pi_0 \pi_1 \pi_2 \pi_3} \right] = \frac{2}{\sqrt{L_{0123}}} = \frac{2}{\sqrt{\text{Det} \|p_i \cdot p_j - \delta_{ij}\|}}, j \in \{0, 1, 2, 3\}$$

Les relations entre parties absorptives sont formellement les mêmes que celles entre leurs cycles données par le tableau (R_1), dont voici une forme plus symétrique :

$$\begin{aligned}
 2 \underline{e}_1 &= - \underline{e}_{10} - \underline{e}_{12} - \underline{e}_{13} - \frac{1}{2} \underline{e}_{0123} \\
 2 \underline{e}_2 &= - \underline{e}_{20} - \underline{e}_{21} - \underline{e}_{23} - \frac{1}{2} \underline{e}_{0123} \\
 2 \underline{e}_3 &= - \underline{e}_{30} - \underline{e}_{31} - \underline{e}_{32} - \frac{1}{2} \underline{e}_{0123} \\
 2 \underline{e}_0 &= - \underline{e}_{01} - \underline{e}_{02} - \underline{e}_{03} - \frac{1}{2} \underline{e}_{0123} \\
 \underline{e}_{012} &= \underline{e}_{123} = \underline{e}_{230} = - \frac{1}{2} \underline{e}_{0123}
 \end{aligned}$$

Ces relations peuvent s'interpréter en termes de graphes réduits :

(Cf. Figure 3 dans laquelle une ligne ondulée veut dire que la particule correspondante est sur sa couche de masse.)

La dernière ligne est la plus frappante et s'interprète ainsi :

la fonction spectrale double $\frac{2}{\sqrt{L_{0123}}}$ est la même fonction analytique que la discontinuité autour d'un seuil anormal multipliée par moins deux.

La première ligne de R_3 se représente par

$$2 \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$$

La dernière ligne de R_3 se représente par

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array} = - \frac{1}{2} \begin{array}{|c|} \hline \text{---} \\ \hline \end{array}$$

C H A P I T R E V I I

S U P P O R T S I N G U L I E R D E S

G R A P H E S A P L U S I E U R S B O U C L E S

I - DISCUSSION DU CHOIX D'UNE METHODE

I.1 REVUE DE CE QUI PRECEDE

- Le chapitre II a présenté ce qu'était l'intégrale brute d'un graphe G de Feynman puis l'a mise sous la forme d'une intégrale multiple :

$$[G, \underline{\beta}, \mathbb{R}, \varepsilon]$$

- Le chapitre I a présenté ce qu'était l'intégrale de type standard et lui a associé un objet géométrique $E = [\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_D \subset Z \times T \rightarrow T]$.

- Le chapitre III (corollaire du théorème d'isotopie) a montré comment étudier certaines* intégrales de type standard, notamment celles dont l'objet géométrique associé $E = [\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_D \subset Z \times T \rightarrow T]$ est algébrique, propre et à croisements normaux, ie tel que :

- les surfaces polaires $\mathcal{S}$ et les surfaces $\mathcal{D}$ de relativité du cycle sont algébriques ;
- il existe une valeur t_0 du paramètre pour laquelle la fibre $S(t_0) \cup D(t_0)$ des surfaces précitées, est en position générale ;
- la variété Z de la variable d'intégration, est compacte.

Le résultat était : la surface de ramification (dite de Landau) de l'intégrale est portée par l'hypersurface de T au-dessus

*dites de type standard strict (Cf. définition 1ter)

des points t de laquelle la fibre $S(t) \cup D(t)$ n'est pas en position générale.

- Le chapitre V a décrit en plus, dans les mêmes hypothèses, comment se ramifiait l'intégrale au voisinage des points de la surface de Landau qui sont simples et qui correspondent à une singularité quadratique.

- Le chapitre IV a de plus décrit, dans les mêmes hypothèses, l'homologie de la fibre en t_0 , c'est-à-dire essentiellement les valeurs, sur les autres "nappes", du germe de l'intégrale.

- Le chapitre VI enfin a montré que les intégrales de graphes à une boucle se présentent presque naturellement sous la forme de ce merveilleux type standard particulier :
ce n'est que pour le graphe triangulaire qu'il a fallu travailler un peu davantage.

I.2 LES ETAPES DE L'ETUDE D'UN GRAPHE A PLUSIEURS BOUCLES

Etape_zéro

Le point de départ sera toujours, pour un graphe G , la forme d'intégrale multiple $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, \varepsilon]$ donnée par le chapitre II.

Mais cette intégrale n'est pas de type standard :

La variété d'intégration, $\underline{\beta} \mathbb{R}$, n'est pas un cycle compact, telle qu'elle se présente. (Cependant l'intégrale est bien uniformément et absolument convergente).

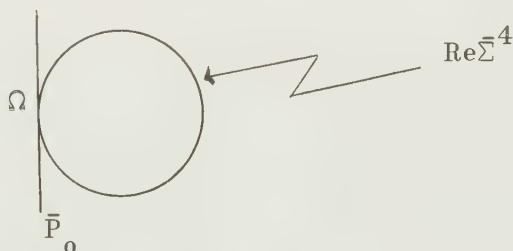
Première étape

On peut songer à COMPACTIFIER, comme on l'a fait pour les graphes à une boucle.

Mais, en général, la première compactification naturelle que l'on choisira, fournira pour compactifiée de $\underline{\beta} \mathbb{R}$ une variété qui rencontrera la surface polaire comme cela fut le cas pour le graphe triangulaire. (Néanmoins, l'intégrale restera uniformément et absolument convergente). Et l'intégrale ne sera toujours pas sous forme standard.

Deuxième étape

Dans le cas précis du graphe triangulaire, la variété d'intégration était la partie réelle d'une 4-sphère $\bar{\Sigma}^4$ et touchait en un point fixe Ω une hypersection polaire plane fixe $\bar{P}_0$ de cette 4-sphère comme indiqué dans la figure ci-après



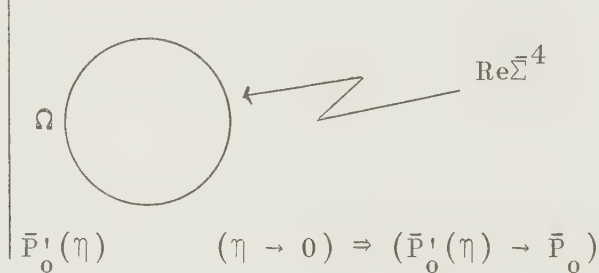
$$\Omega = \bar{P}_0 \cap \text{Re} \bar{\Sigma}^4 \in \bar{P}_0 \cap \bar{\Sigma}^4$$

$\bar{P}_0^4$
 $\bar{\Sigma}^4$

Voici diverses méthodes pour sortir de cette situation dans le cas du graphe triangulaire :

1°/ Accepter que l'intégrale reste définie comme limite d'intégrales le long du complémentaire dans $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$ d'un voisinage de plus en plus petit de Ω , et montrer que l'intégrale ne dépend pas du cycle d'intégration dans le complémentaire dans $\bar{\Sigma}^4$ des surfaces polaires autres que $\bar{P}_0$, dès qu'un tel cycle y a même classe que $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$ et même germe en Ω que $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$. Cette méthode est lourde et inélégante.

2°/ Considérer l'intégrale comme la limite lorsque la surface polaire $\bar{P}_0$ est remplacée par un hyperplan $\bar{P}'_0(\eta)$ ne coupant pas $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$ et qui tend vers $\bar{P}_0$.



Dans cette méthode, dite d'AGGRANDISSEMENT DE L'ESPACE DES PARAMETRES, l'intégrale est de type standard sauf pour la valeur limite intéressante $\eta = 0$ du paramètre supplémentaire.

La régularisation à la Pauli-Villars en est un cas particulier, comme cela a déjà été vu pour $\tilde{U}_\Delta$ et sera explicité à la fin de ce paragraphe.

Cette méthode est dangereuse et demande beaucoup de précautions dans son emploi : le prolongement analytique le long d'un chemin et la prise de la limite lorsque η tend vers zéro ne commutent que dans certaines conditions.

3°/ "ECLATER" l'ensemble gênant des points où la surface polaire rencontre la variété d'intégration.

Cette méthode consiste dans le cas ci-dessus à remplacer Ω par une sous-variété de codimension 1 dans $\bar{\Sigma}^4$ dont on peut interpréter les points comme essentiellement représentant la direction suivant laquelle on approche de Ω dans $\bar{\Sigma}^4$.

Ceci a pour effet de séparer la surface polaire $\bar{P}_0$ de la variété d'intégration $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$:

en effet, les directions d'approche de Ω , en restant sur $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$ sont des directions réelles, tandis qu'en restant sur $\bar{P}_0$ ces directions restent strictement complexes.

La variété d'intégration devient alors cycle relatif (dont le bord est astreint à être dans l'éclatement de Ω).

Dans cette méthode d'éclatement, l'intégrale devient de type standard. Les résultats d'Hironaka vont nous permettre de systématiser cette méthode pour les autres graphes.

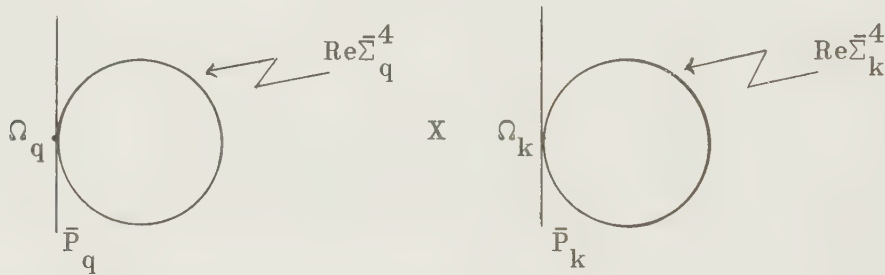
On peut remarquer que cette méthode revient en un certain sens à utiliser simultanément mais indépendamment les méthodes N° 2 et N° 3 ci-dessus ; en effet éclater Ω sur $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$ revient à remplacer Ω par la section de $\text{Re}\bar{\Sigma}^4$ par une sphère centrée sur Ω et dont on prend la trajectoire des points quand le rayon tend vers zéro homothétiquement ; et il en est de même de l'éclatement de Ω sur $\bar{P}_0$, éclatement

que l'on peut représenter à son tour comme "la trajectoire des points du cercle de gorge de $\bar{\Sigma}^4 \cap \bar{P}'_0(\eta)$ " lorsque η tend vers zéro.

La supériorité de cette méthode d'éclatement sur la méthode proposée en 1°/ se voit encore mieux pour le graphe suivant :



dont on n'a représenté que les lignes internes. Après la compactification habituelle et avant l'éclatement,



L'intégrale est à effectuer suivant le produit topologique, $\text{Re} \bar{\Sigma}_q^4 \times \text{Re} \bar{\Sigma}_k^4$, des parties réelles de deux 4-sphères, tandis que le produit topologique des 2-hypersections $(\bar{P}_q^4 \cap \bar{\Sigma}_q^4) \times (\bar{P}_k^4 \cap \bar{\Sigma}_k^4)$ fait partie de la surface polaire.

De sorte que l'ensemble des points gênants où les deux surfaces se coupent est la réunion

$$(\Omega_q \times \text{Re} \bar{\Sigma}_k^4) \cup (\text{Re} \bar{\Sigma}_q^4 \times \Omega_k)$$

La méthode proposée en (1) montre que l'intégrale ne dépend pas du cycle d'intégration dans le complémentaire, dans $\bar{\Sigma}_q^4 \times \bar{\Sigma}_k^4$, des surfaces

polaires autres que $\bar{P}_q^4 \times \bar{P}_k^4$, dès qu'un tel cycle y a même classe que $\text{Re}\bar{\Sigma}_q^4 \times \text{Re}\bar{\Sigma}_k^4$ et même germe en $(\Omega_q \times \text{Re}\bar{\Sigma}_k^4) \cup (\text{Re}\bar{\Sigma}_q^4 \times \Omega_k)$.

Mais cette restriction est beaucoup plus forte qu'il n'est nécessaire.

Troisième étape (Nilsson-Leray-Hironaka)

La mise sous forme d'intégrale de type standard à support singulier algébrique ayant été effectuée, il reste à déterminer les surfaces de ramification ou, comme l'on dit, le support singulier, de la fonction fournie par l'intégration.

Les travaux de Niels Nilsson* nous apprennent** que ce support est algébrique.

Les travaux de J. Leray*** donnent un algorithme**** pour le calculer.

Cet algorithme n'est simple que lorsque les surfaces que nous avons symbolisées par $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{D}$ sont telles qu'il existe un point $t \in T$ de l'espace des paramètres pour lequel la fibre polaire $S(t) \cup D(t)$ est en position générale.

Ce cas simple est précisément celui étudié au chapitre III et rappelé ci-dessus en I.1.

*Cf. Niels Nilsson, Arkiv for math., t.5, 1964, p.463-376.

**du moins dans le cas où le bord du cycle est vide

***Cf. J. Leray, cours au Collège de France 1965-1966.

****du moins dans le cas où T est affine et $X = \bar{P}^n$.

On peut aggrandir, ici encore, l'espace des paramètres de façon à approcher la surface polaire par une surface constamment en position générale. La démarche serait alors d'étudier la fonction obtenue puis d'en prendre la "trace" lorsque le paramètre supplémentaire s'annule. Mais ici encore cette démarche est rendue inutile par les travaux d'Hironaka* dont nous allons rappeler les résultats qui nous intéressent et qui montrent que l'on peut toujours se ramener au cas simple précité.

De plus, un graphe G quelconque présente sa surface polaire en position générale très souvent à l'étape zéro ; de sorte que les travaux d'Hironaka, nous apprennent qu'il existe une compactification algébrique telle que, dès sa première étape, toutes les conditions idéales soient réalisées : intégrale de type standard, à surface polaire et de relativité du cycle $\mathfrak{s}$ et $\mathfrak{D}$ à fibre compacte et en position générale. De sorte que la surface de Landau sera la surface de non position générale de la fibre.

Signalons toutefois trois défauts :

1°/ La non unicité de la désingularisation d'Hironaka fait que si l'on s'y prend mal on introduit des hypersurfaces PARASITES qui ne correspondent à aucune singularité de l'intégrale ; cependant il n'est pas aisé de s'apercevoir que l'on est dans ce cas ;

2°/ A un point, même simple, de la surface de Landau, le lieu correspondant de non position générale de la fibre n'est pas ponctuel quadratique mais de dimension positive ; de sorte que les résultats

*Hironaka : désingularisation. Annals of Math. January-March 1964.

de Picard-Lefschetz-Leray, ne sont pas immédiatement applicables pour la description de la ramification correspondante. Cependant, dans bien des cas le cycle à évanouissement non ponctuel se présente sous la forme d'un cycle étendu fibré par un cycle ponctuel évanouissant et quadratique.

3°/ Même dans ce cas, la description algébrique de la surface de Landau est un leurre : ce sera bien le lieu des points de l'espace des paramètres pour lesquels la fibre polaire n'est pas en position générale. Mais il est bien connu que la résolution des équations exprimant ce fait "ne se fait pas à la main".

Signalons un avantage de la méthode de désingularisation d'Hironaka : il donne une réponse (au moins théorique) à notre problème N° 1 de pseudo stratification de la base de $E = [\mathbb{S} \rightarrow \mathbb{S}_D \rightarrow Y \rightarrow T]$ en composantes d'isotopie. (Cf. Chap. III § III).

I.3 L'AGGRANDISSEMENT DE L'ESPACE DES PARAMETRES ET LA REGULARISATION A LA PAULI-VILLARS

C'est pour mémoire et pour des comparaisons éventuelles que ce paragraphe est écrit.

1 - L'étude de l'intégrale de Feynman $\tilde{U}_G$ d'un graphe G $I(t) = \int_{\Gamma} \frac{\omega(t)}{s(t)}$ (ayant subit l'étape N° 1) par

la méthode d'aggrandissement de l'espace T des paramètres consiste à considérer T comme sous espace d'un espace plus grand $T^+(\tau \in T^+ \supset T \ni t)$ et à considérer une fonction analytique définie par une intégrale

$$I^+(\tau) = \int_{\Gamma} \frac{\omega^+(\tau)}{s^+(\tau)}$$

de type standard dont l'objet géométrique associé

$$E^+ = (\mathfrak{s}^+ \subset \mathfrak{s}_D^+ \subset Z^+ \times T^+ \rightarrow T^+)$$

est tel que

- 1°) Z^+ soit compact
- 2°) $\mathfrak{s}_D^+ \subset Z^+ \times T^+$ soit une famille, algébrique dans Z^+ sur T^+ ,
et en position générale
- 3°) T appartienne à la surface de Landau L^+ de T^+
- 4°) La fonction analytique $I^+(\tau)$ multiforme ainsi définie (ou son produit par une certaine fonction) puisse être prolongée (en tant que fonction continue) de façon unique sur un ouvert dense $T - L$ de T .
- 5°) La restriction $I^+|_{T - L}$ à $T - L$ de cette nouvelle fonction continue soit en fait analytique sur $T - L$ et soit précisé-
ment l'intégrale de Feynman de départ :

$$I(t) = \int_{\Gamma} \frac{\omega(t)}{s(t)}$$

On pourra parfois même se ramener au cas où I^+ est elle-même l'intégrale de Feynman $\mathfrak{F}_{G^+}$ d'un graphe G^+ .

Illustration $\left| \begin{array}{l} G = \triangle \text{ est le graphe triangulaire à une boucle} \\ G^+ = \square \text{ est le graphe carré à une boucle.} \end{array} \right.$

D'après le chapitre VI paragraphe III.2, la fonction de Feynman $\mathfrak{F}_G$ sur le graphe G se présente après la première étape respec-

tivement sous la forme :

$$- \mathfrak{I}_{\Delta} : I_{\Delta} = \int_{\text{Re}\Sigma^4} \frac{\bar{\omega}}{\bar{M}_0 \bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3}$$

$$- \mathfrak{I}_{\square} : I_{\square} = \int_{\text{Re}\Sigma^4} \frac{\bar{\omega}}{\bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3 \bar{M}_4}$$

où $M_j \equiv \sigma + 2\underline{a}_j \cdot \underline{q} + (a_j^2 + m_j^2)\tau$

$$M_0 \equiv \tau$$

$$\bar{\omega} = \frac{1}{\tau} \sum_0^{\tau} \frac{q_i}{d\bar{q}_i} (dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 \wedge d\tau)$$

$(\underline{q}, \sigma, \tau)$ sont les coordonnées homogènes de $\bar{P}^5$

$$\bar{\Sigma}^4 \text{ est définie par } \underline{q}^2 = \sigma\tau$$

L'espace T des paramètres de $G = \Delta$ est donné par

$$T = \{t = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4 = 0, \mu_1, \mu_2, \mu_3)\} \cong \mathbb{C}^{11}.$$

Tandis que l'espace T^+ des paramètres de $G^+ = \square$ est

$$T^+ = \{t^+ = (\underline{a}_1, \underline{a}_2, \underline{a}_3, \underline{a}_4 = 0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4)\} \cong \mathbb{C}^{17}$$

où l'on a posé $\mu_i = 1/m_i^2$.

De sorte que l'on peut considérer T comme inclus dans T^+ , par exemple en l'identifiant au sous espace :

$$T = \{t^+ \in T^+ | \underline{a}_3 = 0, \mu_4 = 0\} \subset T^+.$$

On remarque maintenant que $I_{\square}$ est du type standard et que son objet géométrique associé

$$E_{\square} = (\mathfrak{s}_{\square} \subset \mathfrak{s}_{\square} \subset Z^+ \times T^+ \rightarrow T^+)$$

où $\mathfrak{s}_{\square} = \bigcup_{t^+} ((M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup M_4), t^+) \subset Z^+ \times T^+$

satisfait les conditions 1°) et 2°) ci-dessus.

Tandis que I_{Δ} n'est pas du type standard :

l'objet géométrique qu'on pourrait lui associer serait la restriction

$$E_{\Delta} = E_{\square}|_T \text{ de } E_{\square} \text{ à } T.$$

Il satisfait bien la condition 1°) mais pas la condition 2°), mais, ce qui est plus grave, la chaîne initiale d'intégration $\Gamma_0 = \text{Re}\bar{\Sigma}^4$ est PINCEE par E_{Δ} , (en ce sens que son intersection $\Gamma_0 \cap \mathfrak{s}_{\Delta}$, avec la surface polaire, n'est pas vide et ne peut être rendu tel par déformation locale de Γ_0).

Enfin, on remarque que si $\mathfrak{U}_{\Delta}$ et $\mathfrak{U}_{\square}$ sont les fonctions (au sens large) de Feynman correspondantes, alors $\mathfrak{U}_{\Delta}$ se présente comme la restriction :

$$\mathfrak{U}_{\Delta} = \frac{1}{\mu_4} \cdot \mathfrak{U}_{\square}|_T \text{ à } T \text{ de la fonction } \frac{1}{\mu_4} \cdot \mathfrak{U}_{\square}$$

et toutes les conditions 1°) à 5°) sont satisfaites.

2 - La méthode de régularisation de Pauli-Villars.

Cette méthode commute à la première étape de compactification, elle s'applique aux graphes à intégrale convergente aussi bien qu'à ceux

à intégrale divergente ; elle consiste essentiellement à remplacer, dans l'expression de l'intégrale correspondant au graphe G étudié, une (ou plusieurs) masse fixe m_3^2 par une masse variable $m_3^2 + m_4^2$ à faire la différence des expressions ainsi obtenues, puis à intégrer (c'est la régularisation proprement dite), puis à faire tendre, dans le résultat, la masse m_4^2 vers l'infini.

La régularisée à la Pauli-Villars $\mathcal{R}\tilde{\mathfrak{U}}_\Delta$ de $\tilde{\mathfrak{U}}_\Delta$, c'est-à-dire de

$$I_\Delta = \int_{\text{Re}\Sigma^4} \bar{M}_0 \bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3^{\bar{\omega}}$$

est ainsi

$$\int_{\text{Re}\Sigma^4} (\bar{M}_0 \bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3^{\bar{\omega}} - \bar{M}_0 \bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_4^{\bar{\omega}}) = \int_{\text{Re}\Sigma^4} \frac{M_4' - M_3}{M_0} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3 \bar{M}_4^{\bar{\omega}}$$

où $M_0 = \tau$

$$M_3 = \sigma + 2a_3 \cdot q + (a_3^2 + m_3^2)\tau = \sigma + m_3^2 \tau$$

et $M_4' = \sigma + (m_3^2 + m_4^2)\tau$

de sorte que

$$\frac{M_4' - M_3}{M_0} = m_4^2$$

et la régularisée à la Pauli-Villars de $\tilde{\mathfrak{U}}_\Delta$ est donc

$$\mathcal{R}\tilde{\mathfrak{U}}_\Delta = m_4^2 \times \int_{\text{Re}\Sigma^4} \bar{M}_1 \bar{M}_2 \bar{M}_3 \bar{M}_4^{\bar{\omega}}$$

c'est-à-dire est

$$\mathcal{R}\tilde{\mathfrak{U}}_{\Delta} = m_4^2 \times \tilde{\mathfrak{U}}_{\square} \Big|_{T'}$$

où $T' = \{t^+ \in T^+ \mid \underline{a}_3 = 0\}$

qui, telle que, est du type standard et satisfait les conditions 1°) à 5°) du début de ce paragraphe.

En résumé on a l'emboîtement d'espaces de paramètres

$$T \subset T' \subset T^+$$

et les égalités

$$\tilde{\mathfrak{U}}_{\Delta} = \mathcal{R}\tilde{\mathfrak{U}}_{\Delta} \Big|_T = m_4^2 \times \tilde{\mathfrak{U}}_{\square} \Big|_T$$

et $\mathcal{R}\tilde{\mathfrak{U}}_{\Delta} = m_4^2 \times \tilde{\mathfrak{U}}_{\square} \Big|_{T'}$.

L'intégrale $\mathcal{R}\tilde{\mathfrak{U}}_{\Delta}$ (régularisée de Pauli-Villars) de paramètre T' et l'intégrale $m_4^2 \times \tilde{\mathfrak{U}}_{\square}$ (du graphe carré) de paramètre T^+ étant toutes deux de type standard et vérifiant les conditions 1°) à 5°) .

II - RESUME DES RESULTATS D'HIRONAKA

Ce rappel trouve mieux sa place en appendice E auquel nous conseillons le lecteur de se reporter.

Rappelons que si $E = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}_D \subset X \times T \rightarrow T)$ est un objet géométrique, et si $\widetilde{X} \xrightarrow{f} X$ est un éclatement de X de centre M (plus généralement si $\widetilde{X \times T} \xrightarrow{g} X \times T$ est un éclatement de centre $\mathfrak{M}$ tel que $\widetilde{X \times T}$ soit difféomorphe à un produit, $\widetilde{X} \times T$, par exemple si $g = f \times \text{Id}_T$) alors l'objet géométrique a deux transformées qui sont :

- d'une part :

$$\bar{E} = (\bar{\mathfrak{s}} \subset \bar{\mathfrak{s}}_D \subset \widetilde{X \times T} \rightarrow T)$$

où $\bar{\mathfrak{s}}$ et $\bar{\mathfrak{s}}_D$ sont les fermetures :

$$\text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\mathfrak{s}} = \overline{g^{-1}(\mathfrak{s} - \mathfrak{M})} \subset \widetilde{X \times T} \\ \bar{\mathfrak{s}}_D = \overline{g^{-1}(\mathfrak{s}_D - \mathfrak{M})} \subset \widetilde{X \times T} \end{array} \right. \quad]$$

- et d'autre part :

$$\tilde{E} = (\bar{\mathfrak{s}} \subset \tilde{\mathfrak{s}}_D \subset \widetilde{X \times T} \rightarrow T)$$

[où si $\mathfrak{s}_D = \mathfrak{s}' \cup \mathfrak{D}$, alors $\tilde{\mathfrak{s}}_D = \bar{\mathfrak{s}}' \cup \tilde{\mathfrak{D}}$, où $\tilde{\mathfrak{D}} = g^{-1}(\mathfrak{D})$].

Nous nous efforcerons dans la mesure du possible de nous plier à cette notation.

III - COMMENT UTILISER LES RESULTATS D'HIRONAKA

Il s'agit de franchir la deuxième et la troisième étapes (tracées en I.2.) pour se ramener au type standard strict.

1. La première étape a consisté à compactifier analytiquement en $X = \bar{Z}$ l'espace Z de la variable d'intégration de l'intégrale multiple $[G, \underline{\beta} \mathbb{R}, \varepsilon]$ correspondant au graphe G . Cette compactification devant être telle que :

K_1 - l'espace X de la nouvelle variable d'intégration est maintenant une variété algébrique, compacte, irréductible, non singulière, et de même dimension que Z ;

K_2 - la chaîne d'intégration transformée, Γ_0 , borde maintenant dans un sous ensemble algébrique complexe compact K_0 de X .

K_3 - (simplification facultative) :

si $S(t) \subset X$ est la variété algébrique associée au dénominateur de ce qu'est devenu l'intégrant sous la compactification,

alors l'intersection $S(t) \cap K_0$ est indépendante de t , lorsque t varie dans T dans un voisinage du point GÉNÉRIQUE choisi t_0 .

(On sait déjà que $\Gamma_0 \cap S(t) \subset K_0$, si l'on est parti d'un graphe à intégrale convergente).

L'intégrale originale a maintenant pris la forme

$$\int_{\Gamma_0} \frac{\omega(t_0)}{\bar{s}(\bar{t}_0)}$$

où les conditions (a) et (b) du type standard sont remplies où, de plus, X est compacte mais où la condition (c) n'est pas vérifiée.

Remarque : Si $(S(t_0) \cap \Gamma_0)$ est vide, alors l'intégrale ne dépend que de la classe d'homologie de Γ_0 dans $H_n^c(\bar{Z} - S(t_0), K_0 - S(t_0))$.

Mais si $S(t_0) \cap \Gamma_0$ reste non vide, même après légère modification de ce résultat est faux.

A cette première étape on associe l'objet géométrique :

$$E_G = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}_D \subset X \times T \rightarrow T)$$

où

$$\left| \begin{array}{l} \mathfrak{s} = \bigcup_t (S(t), t) \subset X \times T \\ \text{et } \mathfrak{s}_D = \mathfrak{s} \cup \mathfrak{D} \\ \text{avec } \mathfrak{D} = K_0 \times T \end{array} \right.$$

et la chaîne d'intégration Γ_0 .

2. Comme deuxième et troisième étapes, on prend :

(i) une désingularisation* $(\tilde{X}, \overline{S(t_0)} \cup \bar{K}_0)$ du COUPLE $(X, S(t_0) \cup K_0)$.

Cette désingularisation est caractérisée par une projection holomorphe $\tilde{X} \rightarrow X$, qui est biholomorphe au-dessus d'un ouvert dense maximal $U = X - M \subset X$.

(ii) L'objet géométrique $\tilde{E}_G$ et la chaîne $\tilde{\Gamma}_0$ transformés (au sens du paragraphe II) de E_G et de Γ_0 par la désingularisation

$$g = f \times \text{Id}_T : \tilde{X} \times T \rightarrow X \times T.$$

Autrement dit

$$\tilde{E}_G = (\tilde{\mathfrak{s}} \subset \tilde{\mathfrak{s}}_D \subset \widetilde{X \times T} \rightarrow T)$$

*au sens d'Hironaka, Cf. Appendice E, définition 1 et notations.

où

$$\bar{s} = g^{-1}(s - M \times T) \subset \widetilde{X \times T}$$

176

$$\widetilde{\mathfrak{D}} = g^{-1}(\mathfrak{D}), \quad \widetilde{s} = \bar{s} \cup \widetilde{\mathfrak{D}}$$

et

$$\bar{\Gamma}_0 = \overline{f^{-1}(\Gamma_0 - M)}$$

Puisque f est holomorphe, la composée $\widetilde{\omega}(t) = \omega(t) \circ f$ est une n -forme analytique régulière sur $\widetilde{X}$ qui dépend analytiquement de $t \in T$.

Puisque f est biholomorphe sauf sur un sous ensemble algébrique $\widetilde{M} = f^{-1}(M) \subset \widetilde{X}$ de codimension un de $\widetilde{X}$, le dénominateur de $\frac{\omega(t_0)}{\bar{s}(t_0)}$ admet un prolongement unique dans $\widetilde{X}$ en $\bar{s}(t_0)$.

Pour cette même raison, on a l'égalité des intégrales :

$$\int_{\bar{\Gamma}_0} \frac{\widetilde{\omega}(t_0)}{\bar{s}(t_0)} = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega(t_0)}{s(t_0)}$$

où $\widetilde{s}(t) = s(t) \circ f = \lambda \cdot \bar{s}(t)$ où λ est une fonction algébrique sur $\widetilde{X}$.

Les conditions (a) et (b) sont préservées par la désingularisation comme le montre l'étude faite dans l'appendice E.

A ce stade, la condition (c) sera en général vérifiée :

de façon plus précise, nous montrons dans le théorème qui suit que si l'intégrale initiale de Feynman est convergente pour $t = t_0$, alors d'une part $\frac{\omega(t_0)}{\bar{s}(t_0)}$ se simplifie, par division par un facteur commun au numérateur et au dénominateur, en $\frac{\bar{\omega}(t_0)}{\bar{s}(t_0)}$, faisant ainsi apparaître comme seule surface polaire la réunion $\bar{S}'(t_0) = \bar{S}(t_0) \cup \bar{M}'$ de la transformée stricte $\bar{S}(t_0)$ de $S(t_0)$, avec éventuellement une partie $\bar{M}'$ des composantes irréductible de $\widetilde{M}$, et d'autre part l'on trouvera que $\bar{\Gamma}_0 \cap \bar{S}'(t_0) \subset \partial \bar{\Gamma}_0$ est vide.

Ceci entraîne comme corollaire que le support singulier de

l'intégrale de Feynman est algébrique, en effet toutes les équations qui

figurent dans la discussion qui suit sont algébriques.

Maintenant, $\bar{\Gamma}_0$ est le représentant d'une certaine classe de $H_n^c(\tilde{X} - \bar{S}(t_0), \tilde{K}_0 - \bar{S}(t_0))$ et notre problème se trouve résolu :

L'intégrale est devenue de type standard strict

l'objet géométrique associé $\tilde{E}_G = (\bar{s} \subset (\bar{s} \cup \tilde{\mathcal{D}}) \subset \widetilde{X \times T} \rightarrow T)$ est à "fibre compacte et en position générale".

L'intégrale de Feynman $\int_{\bar{\Gamma}_0} \frac{\bar{\omega}(t_0)}{\bar{s}(t_0)}$ peut être prolongée analytiquement le long de tout chemin de $T - L$ où :

$$L = \{t \in T \mid \bar{S}(t) \cup \tilde{K}_0 \text{ n'est pas en position générale}\}$$

Cet L contient toute la surface de Landau du diagramme, mais certaines des composantes irréductibles de L peuvent ne rien avoir à faire avec notre problème initial (ie ne font pas partie des singularités de notre intégrale quel que soit le "feuillet" considéré)*.

Ce phénomène est un sous produit de la non unicité de la construction, car

- (γ) un choix a été fait dans l'étape N° 1 (de compactification)
- (δ) et la désingularisation d'Hironaka du couple $(X, S(t_0) \cup K_0)$ n'est pas unique.

Enfin, puisque nous savons que cette désingularisation peut être obtenue** par une succession d'éclatements à centres réguliers,

* De telles composantes s'appellent "parasites" dans la suite.

**Cf. appendice E, théorème 2 de Hironaka.

et puisqu'un éclatement à centre donné est unique, l'arbitraire mentionné en (δ) est seulement celui du choix des centres successifs, c'est-à-dire, si l'on prend leur image successive dans X , cet arbitraire est celui du choix d'une bonne stratification (à la Thom) de l'ensemble algébrique dans X formé par les points de non position générale de $S(t_0) \cup K_0$.

En toute rigueur, on devrait donc écrire L_{XH} au lieu de L , où $X = \bar{Z}$ indique la compactification choisie pour Z et où H indique la désingularisation d'Hironaka choisie.

3. Le théorème du support singulier algébrique

Lemme 1

Soit $\bar{X}(\mathbb{C})$ une variété $\left\{ \begin{array}{l} \text{complexe} \\ \text{algébrique} \\ \text{sans singularité} \\ \text{de dimension } n \end{array} \right.$

munie⁺ d'une partie réelle $\bar{X}(\mathbb{R})$ supposée compacte. Soit $\bar{S} \subset \bar{X}$ une union d'hypersurfaces en position générale, chacune étant non singulière et d'équation réelle.

Soit $\bar{S}(\mathbb{R}) = \bar{S} \cap \bar{X}(\mathbb{R})$ la partie réelle de $\bar{S}$.

Soit $\frac{\bar{\omega}}{\bar{s}}$ une n -forme algébrique "réelle sur $\bar{X}(\mathbb{C})$ ", dont les seules singularités sont polaires et effectivement portées par $\bar{S}$.

Alors l'intégrale : $\int_{\bar{X}(\mathbb{R})} \frac{\bar{\omega}}{\bar{s}}$ est absolument convergente, si et

seulement si $\bar{S}(\mathbb{R}) = \bar{S} \cap \bar{X}(\mathbb{R})$ est vide.

⁺Cf. appendice D pour une définition précise.

Preuve

L'absolue convergence de l'intégrale signifie la convergence de la suite des nombres positifs indexés par p : $\int_{\bar{S}} |\bar{\omega}|$, lorsque K_p parcourt une suite de compacts emboîtés $K_p \subset K_{p+1} \subset (\bar{X}(\mathbb{R}) - \bar{S}(\mathbb{R}))$ dont la réunion est $\bar{X}(\mathbb{R}) - \bar{S}(\mathbb{R})$.

$\bar{X}(\mathbb{R})$ étant compacte, cette absolue convergence est équivalente à l'absolue convergence locale en $\bar{X}(\mathbb{R})$.

Soit $0 \in \bar{S}(\mathbb{R})$ un point réel de $\bar{S}$, alors d'après l'hypothèse de réalité et celle de position générale, il existe une carte d'origine de notre atlas réel, et telle que dans un voisinage réel B de l'origine l'intégrale soit de la forme

$$0 \in \mathbb{R}^n \supset B \quad \int \varphi(x) \frac{H(x_{p+1}, \dots, x_n) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n}{x_1^{r_1} \dots x_p^{r_p}}$$

où $x = (x_1, \dots, x_n)$

où φ est holomorphe au voisinage de zéro et $\varphi(0) \neq 0$,

où $H(x_{p+1}, \dots, x_n)$ est un monome,

où $x_1 x_2 \dots x_p = 0$ est l'équation locale de $\bar{S}$

et où $r_j \geq 1$ est un entier pour $j = 1, \dots, p$.

Une telle intégrale n'est visiblement pas absolument convergente au voisinage de 0.

On a donc bien établi que la réalité des équations de $\bar{S}$, et sa position générale*entraînent que l'intégrale n'est absolument convergente que si la partie réelle de $\bar{S}$ est vide.

*Intrinsèque et avec la variété des zéros de $\bar{\omega}$.

Théorème (Corollaire du lemme précédent)

L'intégrale de Feynman $\int_{\Gamma_0} \frac{\omega(t_0)}{s(t_0)}$ associée à un graphe

convergent G , peut toujours se mettre sous forme standard stricte.

Corollaire.

Le support singulier d'une telle intégrale est algébrique

Preuve du théorème

1°/ On peut choisir la compactification $X(\mathbb{C})$ (déjà accomplie dans la première étape) de telle sorte qu'elle soit "réelle" et que Γ_0 soit justement la partie réelle $X(\mathbb{R})$ de $X(\mathbb{C})$

2°/ D'après le chapitre II, on peut choisir la valeur initiale t_0 du paramètre de telle sorte que

- (a) $\omega(t_0)$ et $s(t_0)$ soient d'équation réelle dans $X(\mathbb{C})$
- (b) chaque composante irréductible de $S(t_0) = \{x | s(x, t_0) = 0\}$ soit d'équation réelle dans $X(\mathbb{C})$.

3° Alors la désingularisation* d'Hironaka $f : \tilde{X} \rightarrow X$ du couple $(X, S(t_0))$, peut être choisie réelle.

L'égalité déjà mentionnée :

$$\int_0 \frac{\tilde{\omega}(t_0)}{\tilde{s}(t_0)} = \int_{\Gamma_0} \frac{\omega(t_0)}{s(t_0)}$$

présente l'intégrale sous un nouvel aspect où $\tilde{\Gamma}_0$ est la partie réelle $\tilde{X}(\mathbb{R})$ de $\tilde{X}(\mathbb{C})$ et où $\tilde{\omega}(t_0) = \omega(t_0) \circ f$ $\tilde{s}(t_0) = s(t_0) \circ f$ restent évidemment d'équations réelles dans $\tilde{X}(\mathbb{C})$

*Nous supposons ici que $g = f \times \text{Id } T : \tilde{X}.T \rightarrow X.T$ est alors une désingularisation du couple $(X \times T, \mathfrak{S})$.

Le lemme 2 et la proposition qui le suit montrent que l'on peut toujours se ramener à ce cas.

mais où $\tilde{S}(t_0) = \{x \in \tilde{X} \mid \tilde{s}(t_0, x) = 0\}$ a ses composantes irréductibles en position générale, sans singularité et d'équation réelles.

On se rappellera que $\tilde{S}(t_0)$ est la réunion de la transformée stricte $\bar{S}(t_0)$ (d'équation $\bar{s}(t_0) = 0$) et de l'image réciproque $\tilde{M} = f^{-1}(M)$ du "centre" $M \subset S(t_0)$ de la désingularisation, et on désignera par $\lambda = 0$ une équation dans $\tilde{X}(\mathbb{C})$ d'une ou plusieurs composantes irréductibles de

Mais f est propre et est, de plus, biholomorphe sur $(\tilde{X}(\mathbb{C}) - \tilde{M})$ donc notamment sur $\tilde{X}(\mathbb{C}) - \tilde{S}(t_0)$. Donc la convergence absolue de $\int_{\Gamma_0} \frac{\omega}{s}$

est équivalente à la convergence absolue de $\int_{\Gamma_0} \frac{\tilde{\omega}(t_0)}{\tilde{s}(t_0)}$

Donc, d'après le lemme, pour un graphe convergent, la forme $\frac{\tilde{\omega}(t_0)}{\tilde{s}(t_0)}$ est égale à la forme $\frac{\bar{\omega}(t_0)}{\bar{s}'(t_0)}$ (après division par λ du numérateur et du dénominateur)

où $\bar{S}'(t_0) = \{x \in \tilde{X}(\mathbb{C}) \mid \bar{s}'(t_0, x) = 0\}$

est à partie réelle vide (et est la réunion de la transformée stricte $\bar{S}(t_0)$ de $S(t_0)$ et éventuellement d'un certain nombre de composantes à partie réelle vide de $\tilde{M}$)

L'intégrale devient donc $\int_{\Gamma_0} \frac{\bar{\omega}(t_0)}{\bar{s}'(t_0)}$ qui est de type standard strict

Remarque sur l'homologie

Si la partie réelle $\bar{\Gamma}_0 = \tilde{X}(\mathbb{R})$ de $\tilde{X}(\mathbb{C})$ est une variété orientable (et si la parité de la forme n'a pas changé par éclatement) alors $\bar{\Gamma}_0$ doit être considéré comme définissant une classe de l'homologie absolue :

$$\bar{\Gamma}_0 \in H_n^c(\tilde{X}(\mathbb{C}) - \bar{S}(t_0)) .$$

Si par contre $\bar{\Gamma}_0 = \tilde{X}(R)$ est une variété non orientable, alors $\bar{\Gamma}_0$ doit être considéré comme définissant une classe de l'homologie relative :

$$\bar{\Gamma}_0 \in H_n^c(\tilde{X}(\emptyset) - \bar{S}'(t_0), \tilde{D} - \bar{S}' \cap \tilde{D})$$

bordant dans $\tilde{D} - \bar{S}' \cap \tilde{D}$ où $\tilde{D} = \pi^{-1}(D)$.

Si, de plus $\bar{S}'$ est égal à $\bar{S}$, alors le théorème de dualité par intersection ponctuelle (cf. Appendice B p.5) s'applique puisque $\tilde{D} - \bar{S} \cap \tilde{D}$ est une union d'hypersurfaces non singulières et en position générale dans $\tilde{X} - \bar{S}$. Il nous apprend que notre groupe d'homologie relative est le dual (sur $\emptyset$) de

$$H_n^\phi(X - S)$$

où ϕ est la famille des fermés de $X - S$ qui sont aussi fermés dans $(\tilde{X} - \bar{S})$:

En effet $(\tilde{X} - \bar{S}) - (\tilde{D} - \bar{S} \cap \tilde{D}) = X - S$.

]].

Remarque sur les intégrales divergentes

On peut procéder comme précédemment jusqu'à l'avant dernière étape, ce qui donne :

$$X(R) \int_{\bar{S}}^{\omega} = \tilde{X}(R) \int_{\tilde{S}}^{\tilde{\omega}} \quad (\text{divergente})$$

puis, remarquer que $\tilde{S}$ s'écrit $\tilde{S} = \lambda \cdot \bar{S}$ où $\bar{S}$ est la transformée stricte de S . Si maintenant $\bar{S}(R) = \bar{S} \cap \tilde{X}(R)$ est vide, (question dont nous allons nous occuper au lemme 3), on peut substituer à l'intégrale divergente, l'intégrale convergente suivante

$$\tilde{X}(R) \int_{\bar{S}}^{\tilde{\omega}}$$

J'ignore s'il y a un moyen préférentiel de le faire

]].

La démonstration du théorème du support singulier algébrique, donnée ci-dessus, suppose que le centre d'éclatement est indépendant de $t \in T$.

Cette hypothèse simplificatrice était donc :

si $f : \tilde{X} \rightarrow X$ est une désingularisation réelle du couple $(X, S(t_0))$, alors $g = f \times \text{Id } T : \tilde{X} \times T \rightarrow X \times T$ est une désingularisation du couple $(X \times T, \mathfrak{s})$.

Comme elle peut n'être pas vérifiée, montrons qu'elle n'est pas nécessaire :

Lemme 2 (trivial)

Soient $\mathfrak{D}$, Y , T trois variétés algébriques non singulières et $Y \xrightarrow{\pi} T$ un morphisme algébrique tels que $(\mathfrak{D} \subset Y \xrightarrow{\pi} T)$ soit un fibré filtré en fibré.

Soit $\tilde{Y} \xrightarrow{g} Y$ l'éclatement de centre $\mathfrak{D}$, et $\tilde{\mathfrak{D}} = g^{-1}(\mathfrak{D})$ l'image inverse de $\mathfrak{D}$.

Alors $\tilde{\mathfrak{D}}$ est une variété algébrique non singulière, et

$$(\tilde{\mathfrak{D}} \subset \tilde{Y} \xrightarrow{\pi \circ g} T)$$

est un fibré filtré en fibré.

De plus si $t \in T$, la restriction $g|_{(\pi \circ g)^{-1}(t)} : \tilde{Y}_t \rightarrow Y_t$ est l'éclatement de $Y_t = \pi^{-1}(t)$ de centre $D_t = Y_t \cap \mathfrak{D}$.
(on utilisera la propriété universelle de l'éclatement).]]

Proposition

Soit X une variété algébrique compacte non singulière,
soit T une variété non singulière algébrique,
soit $\mathfrak{s} \subset X \times T$ une famille* algébrique dans X sur T ,
on suppose de plus que X et T sont munies chacune d'une partie réelle**
 $X(\mathbb{R})$ et $T(\mathbb{R})$ et que $\mathfrak{s}$ est d'équation locale réelle dans l'atlas réel de $X \times T$.

* au sens de l'appendice E

** au sens de l'appendice D.

Soit " $\frac{\omega}{s}$ " une forme algébrique dans X sur T (ie une forme sur λ dépendant algébriquement de $t \in T$) d'équation réelle et dont le coefficient admet des zéros et des pôles portés par s .

On suppose degré de " $\frac{\omega}{s}$ " = dimension de X et qu'il existe $t_0 \in T(\mathbb{R})$ tel que

$$\Gamma_0 = X(R) \int \frac{\omega}{s}$$

soit absolument convergente lorsque t varie dans un voisinage de t_0 .

Conclusion

La fonction analytique définie sur T par l'intégrale est à support singulier algébrique.

Preuve

Nous montrerons qu'en dehors d'un sous ensemble algébrique fermé de T , cette fonction peut se mettre sous forme d'une intégrale de type standard strict.

(ie sous la forme $\int \frac{\bar{\omega}(t)}{\bar{s}'(t)} dt$ où $\bar{\Gamma}(t)$ ne touche pas les variétés

polaires $\bar{s}'(t)$, lesquelles sont en position générale).

Posons $Y = X \times_T \xrightarrow{\pi} T$, alors il existe une désingularisation réelle d'Hironaka :

$$\tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$$

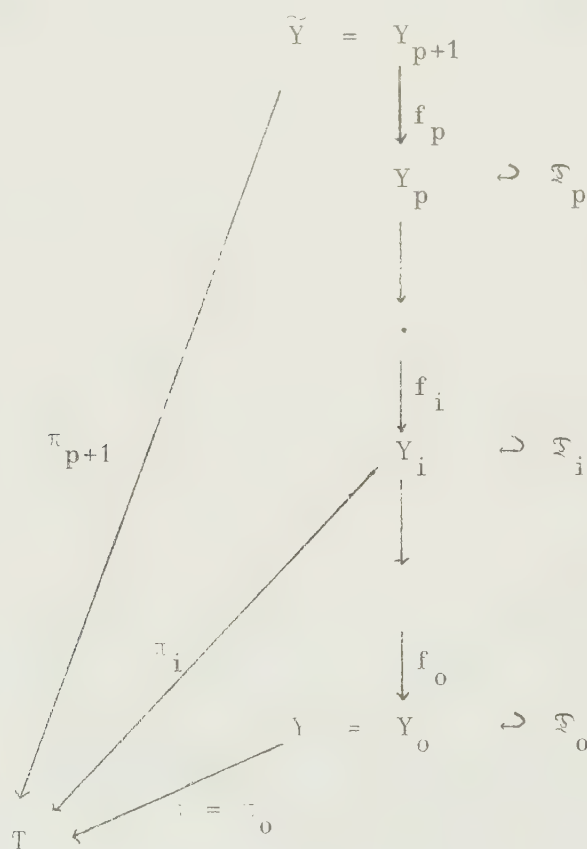
du couple $Y \rightarrow s$.

Malheureusement la composition $\pi \circ f : \tilde{Y} \rightarrow T$ n'est plus en général une fibration.

Une première étape consistera à extraire de T une hypersurface $N \subset T$ telle que $\pi \circ f$ soit une fibration au-dessus de $T - N$.

Alors la démonstration faite pour un centre fixe se transpose à notre situation, grâce au lemme précédent.

La désingularisation $f : \tilde{Y} \rightarrow Y$ du couple $Y \supset \mathfrak{s}$, s'obtient d'après le résultat rappelé à l'appendice E comme composée d'une succession finie d'éclatements algébriques f_i d'équations réelles de centres $\mathfrak{D}_i$ réels et fermés



et chaque centre $\mathfrak{D}_i$ est une variété algébrique fermée, sans singularité, à nombre fini de composantes.

On enlève définitivement de T :

- 1°/ La réunion N_1 des fermetures de l'image par chaque π_i des composantes F_i de $\mathfrak{D}_i$ telles que $\pi_i(F_i)$ soit strictement de codimension un dans T .
- 2°/ La réunion N_2 des composantes irréductible de codimension un dans T de la variété des valeurs critiques de la restriction pour chaque i $\pi_i|_{\mathfrak{D}_i}$ de π_i à $\mathfrak{D}_i$.

On enlève momentanément de T :

- 3°/ La réunion N_3 des fermetures de l'image par chaque π_i des composantes G_i de $\mathfrak{D}_i$ telles que $\pi_i(G_i)$ soit strictement de codimension plus grande que un dans T .
- 4°/ La réunion N_4 des composantes irréductibles de codimension strictement supérieure à un dans T de la variété des valeurs critiques pour chaque i $\pi_i|_{\mathfrak{D}_i}$ de π_i à $\mathfrak{D}_i$.

Soit $N' = N_1 \cup N_2 \cup N_3 \cup N_4$, c'est un sous ensemble algébrique fermé de T , de plus il est tel que la restriction $\pi_{p+1} : \tilde{Y}|_{T-N'} \rightarrow T - N'$ soit une fibration :

[En effet il suffit d'appliquer successivement le lemme 2 précédent aux couples $(\mathfrak{D}_i' \subset Y_i' \xrightarrow{\pi_i'} T - N')$ (où π_i' est la restriction de π_i à $\pi_i^{-1}(T - N')$), en commençant par $\mathfrak{D}_0 \subset Y_0$].

Mais $\mathfrak{S} = \pi_{p+1}^{-1}(\mathfrak{s})$ est en position générale dans $\tilde{Y}' = \tilde{Y}|_{T-N'}$, et est algébrique.

Donc le corollaire au théorème d'isotopie s'applique : il existe un sous ensemble algébrique fermé $N'' \subset T - N'$ tel que $(\tilde{s} \subset \tilde{Y} \xrightarrow{\pi} T)$ soit, au-dessus de $T - (N' \cup N'')$, un fibré filtré en fibré.

N

De plus, au-dessus de $T \in T - (N' \cup N'')$, la fibre $\tilde{S}(t)$ de $\tilde{s}$ est une union de sous variétés de $\tilde{Y}_t$ en position générale.

Notons enfin que lorsque $t \in T(R)$, alors on a l'égalité $\tilde{Y}_t(R) = \tilde{Y}(R) \cap \tilde{Y}_t$ qui munit effectivement la fibre $Y_t = \pi_{p+1}^{-1}(t)$ d'une partie réelle au sens de l'appendice D.

De plus, $\tilde{Y}_t(R)$ est la transformée stricte de $X(R)$ et $\pi_{p+1}|_{\tilde{Y}_t(R)} \rightarrow X(R)$ est un biholomorphisme, sauf sur une partie de codimension un.

Cette première étape et le lemme 2 justifient donc l'hypothèse simplificatrice faite préalablement sur f .

Donc l'étude déjà faite dans ce cas s'applique et montre que si l'intégrale initiale converge absolument en un point de $T - N$, alors elle devient d'écriture standard strict au-dessus de ce point, en $\tilde{Y}$, $\tilde{s}$. (La chaîne d'intégration est bien dégagée).

De plus la fonction qu'elle représente est analytique sur T avec support singulier dans la partie de N qui est de codimension un dans T .]].

Lemme 3 (Démontré par H. Hironaka)*

Si X est une variété $\left\{ \begin{array}{l} \text{complexe} \\ \text{algébrique} \\ \text{compacte} \\ \text{sans singularité} \\ \text{admettant une partie réelle } X(\mathbb{R}) \end{array} \right.$

Si $S \subset X$ est une sous variété $\left\{ \begin{array}{l} \text{algébrique} \\ \text{fermée} \\ \text{singulière} \\ \text{irréductible (pour simplifier)} \\ \text{d'équation réelle} \end{array} \right.$

Si $S(\mathbb{R}) = S \cap X(\mathbb{R})$ est la partie réelle de S .

Si $\dim_{\mathbb{R}} S(\mathbb{R}) < \dim_{\mathbb{C}} S$ strictement.

Alors il existe un éclatement réel

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \xrightarrow{\pi} & X \\ \tilde{S} & \longrightarrow & S \end{array}$$

de X , le long d'un Centre réel D situé dans le lieu singulier de S , et tel que la transformée stricte $(\tilde{S} = \pi^{-1}(S-D))$ de S n'a pas de point réel (ie $\tilde{S}(\mathbb{R}) = \tilde{S} \cap \tilde{X}(\mathbb{R})$ est vide)

En effet

1°/ S étant d'équation réelle dans X et $\dim_{\mathbb{R}} S(\mathbb{R}) < \dim_{\mathbb{C}} S$ strictement, entraînent, avec le théorème des fonctions implicites, que la partie réelle $S(\mathbb{R})$ de S est située dans le lieu (Sing S) des points singuliers de S

$$\text{ie } S(\mathbb{R}) \subset (\text{Sing } S)$$

Il suffit en effet de vérifier cela dans $\mathbb{C}^n$.

*A la rencontre de Seattle (Eté 1967)

2°/ Soit maintenant

$$\begin{array}{ccc} \bar{S} & \longrightarrow & \tilde{X} \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ D \subset S & \hookrightarrow & X \end{array}$$

une désingularisation réelle à la Hironaka de S dans X .

$\bar{S}$ étant la transformée stricte de S ,

$\bar{S}$ est non singulier donc déjà :

$$(\alpha) \quad \dim_{\mathbb{R}}(\bar{S}(R)) = \dim_{\mathbb{C}} \bar{S} = \dim_{\mathbb{C}} S$$

De plus le centre réel D de l'éclatement π est lui-même situé dans $(\text{Sing } S)$, mais π étant un éclatement, est, au-dehors de $\pi^{-1}(D)$, un isomorphisme des structures complexes, donc les inclusions $S(R) \subset (\text{Sing } S) \supset D$ entraînent que

$$\bar{S}(R) = S \cap \tilde{X}(R) \subset \pi^{-1}(\text{Sing } S)$$

d'où

$$(\beta) \quad \dim_{\mathbb{R}}(\bar{S}(R)) = \dim_{\mathbb{R}}(\pi^{-1}(\text{Sing } S) \cap \bar{S}(R)) ;$$

Mais $\pi^{-1}(\text{Sing } S)$ et $\bar{S}$ sont en position générale, donc à intersection non singulière et de dimension inférieure à celle de chacun d'eux, donc

$$(\gamma) \quad \dim_{\mathbb{R}}(\pi^{-1}(\text{Sing } S) \cap \bar{S}(R)) = \dim_{\mathbb{C}}(\pi^{-1}(\text{Sing } S) \hat{\cap} \bar{S}) < \dim_{\mathbb{C}}(\delta).$$

De (α) , (β) , (γ) on déduit que $\bar{S}(R)$ est vide.

4. Remarque Heuristique

Liens entre la désingularisation d'Hironaka du couple $(X, S(t_0) \cup E_0)$ et la méthode de l'agrandissement de l'espace du paramètre T .

La méthode d'Hironaka, vue sous l'angle d'une succession d'éclatements à centres réguliers, revient (en un sens à préciser) à associer à chaque point de chaque composante de $S(t_0) \cup E_0$ un élément de contact de X d'un ordre assez élevé, c'est-à-dire revient à travailler dans un espace de jets, c'est-à-dire dans quelque espace en grassmannienne généralisée au-dessus de X , et à laisser T inchangé.

Tandis que l'agrandissement de l'espace T des paramètres consiste à considérer T comme sous espace d'un espace plus grand T^+ ($\tau \in T^+ \supset T \ni t$) et à considérer une fonction analytique



$$I(\tau) = \int_{\Gamma} \frac{\omega(\tau)}{s(\tau)}$$

dont les singularités contiennent T .

Alors cette fonction analytique $I(\tau)$ (ou son produit par une certaine fonction) peut être prolongée (en tant que fonction continue) de façon unique sur un ouvert dense de $T : T - L$, puis la restriction à $T - L$ de cette nouvelle fonction continue est précisément l'intégrale de Feynman et est analytique sur $T - L$.

Voici un lien entre ces deux méthodes ;

prenons un chemin $\widehat{\tau t_0}$ de τ à t_0 , situé (hormis le point t_0) entièrement dans $(T^+ - \{\text{singularités de } I(\tau)\}) \subset T^+ - T$, alors la surface $S(\tau)$ tend vers $S(t_0)$ dans X , et, pour tout point de $\widehat{\tau t_0} - \{t_0\}$, il y a une isotopie X -ambiante de $S(\tau)$;

Maintenant, puisque $S(\tau)$ est en position générale, cette isotopie X -ambiante peut être choisie analytique (localement dans la fibre) et si à tout point $p \in S(\theta)$ l'on associe le germe en p de cette isotopie et l'on prend la "limite" quand $\theta \in \widehat{\tau t_0} - \{t_0\}$ tend vers t_0 , alors nous aurons associé un X -élément de contact d'ordre élevé à chaque point de $S(t_0)$ et il est probable qu'en procédant ainsi pour tout $t \in T$, on obtient une désingularisation à la Hironaka de notre couple.

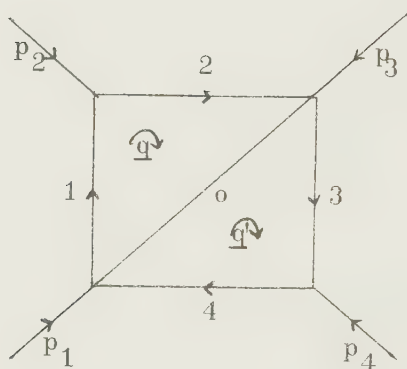
- - - - -

IV - L'EXEMPLE DU GRAPHE



$$[\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \varepsilon] \text{ est } \int_{\mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4} \frac{d^4 \underline{q} \wedge d^4 \underline{q}'}{Q_1 Q_2 \Phi Q'_3 Q'_4}$$

où



avec

$$Q_i \equiv (\underline{q} + \underline{a}_i)^2 + m_i^2 \quad i \in \{1, 2\}$$

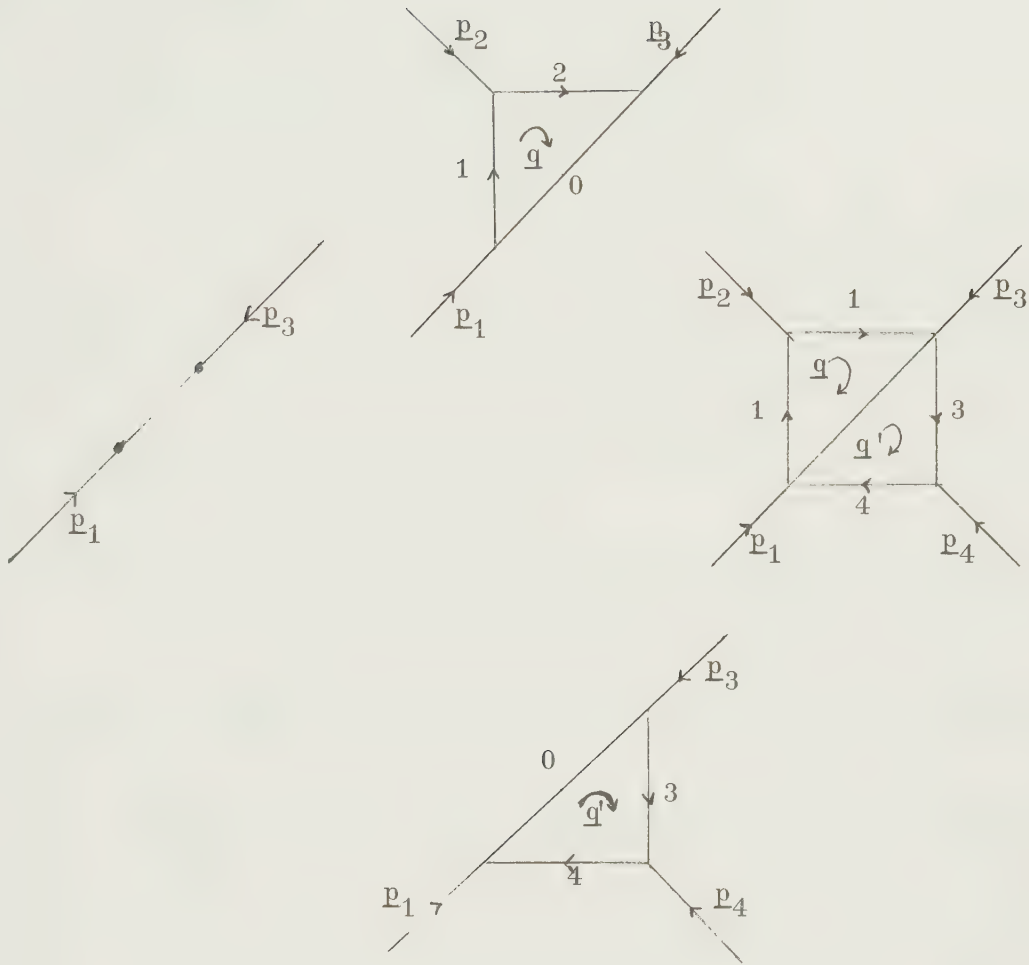
$$Q'_j \equiv (\underline{q}' + \underline{a}_j)^2 + m_j^2 \quad j \in \{3, 4\}$$

$$\Phi \equiv (\underline{q} - \underline{q}')^2 + m_0^2$$

et

$$\begin{cases} \underline{a}_1 = \tilde{\underline{p}}_1 \\ \underline{a}_2 = \tilde{\underline{p}}_1 + \tilde{\underline{p}}_2 \\ \underline{a}_3 = \tilde{\underline{p}}_1 + \tilde{\underline{p}}_2 + \tilde{\underline{p}}_3 \\ \underline{a}_4 = \tilde{\underline{p}}_1 + \tilde{\underline{p}}_2 + \tilde{\underline{p}}_3 + \tilde{\underline{p}}_4 = 0 \end{cases}$$

Nous considérons le graphe à étudier comme la somme amalgamée de deux graphes triangulaires :



L'étude du graphe triangulaire a déjà été effectuée et donnait lieu à une première compactification suivie d'un éclatement.

Nous devons donc recommencer par là :

(a) La première compactification de chaque triangle est :

$$\mathcal{C}_q^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}_q^4 \subset \bar{P}^5 \ni (q, \sigma, \tau)$$

$$q \mapsto (q, \sigma, \tau) \text{ avec } \sigma\tau = q^2 \text{ et } \tau = 1$$

Cette première compactification donne la correspondance suivante :

$$\begin{aligned}
d^4 \underline{q} &\mapsto \frac{1}{\tau} \frac{1}{4} \bar{\omega} \\
Q_i &\mapsto \frac{1}{\tau} M_i \\
Q'_j &\mapsto \frac{1}{\tau'} M'_j \\
\mathfrak{L} &\mapsto \frac{1}{\tau \tau'} \mathfrak{L} \\
d^4 \underline{q}' &\mapsto \frac{1}{\tau'} \frac{1}{4} \bar{\omega}'
\end{aligned}$$

$$[\square, \mathbb{R}, \varepsilon] \quad \text{Re}(\bar{\Sigma}^4_{\underline{q}} \times \bar{\Sigma}^4_{\underline{q}'}) \int \frac{\bar{\omega} \wedge \bar{\omega}'}{\tau (M_1 M_2 \mathfrak{L} M'_3 M'_4) \tau'}$$

$$\begin{aligned}
\text{où} \quad \bar{\omega} &= \frac{1}{\tau} \Sigma \frac{q_i}{dq_i} (dq_0 \wedge dq_1 \wedge dq_2 \wedge dq_3 \wedge d\tau) \Big|_{\bar{\Sigma}^4_{\underline{q}}} \\
\bar{\omega}' &= \frac{1}{\tau'} \Sigma \frac{q'_i}{dq'_i} (dq'_0 \wedge dq'_1 \wedge dq'_2 \wedge dq'_3 \wedge d\tau') \Big|_{\bar{\Sigma}^4_{\underline{q}'}}
\end{aligned}$$

$$\bar{\Sigma}^4 \subset \bar{P}^5 \ni \bar{q} = (\underline{q}, \sigma, \tau) \text{ est défini par}$$

$$\bar{\Sigma}^4 = \{ \bar{q} \in \bar{P}^5 \mid \bar{q}^2 = 0 \quad \text{ie} \quad \text{tg } \underline{q}^2 = \sigma \tau \}$$

$$M_1 = \bar{q} \cdot \bar{t}_1 \qquad M'_3 = \bar{q}' \cdot \bar{t}_3$$

$$M_2 = \bar{q} \cdot \bar{t}_2 \qquad M'_4 = \bar{q}' \cdot \bar{t}_4$$

$$\text{où} \quad \bar{t}_i = (\underline{a}_i, -(\underline{a}_i^2 + m_i^2), -1) \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\text{et} \quad -\mathfrak{L} = \bar{q} \triangleq \bar{q}' = \bar{q} \underset{m_0}{2} \cdot \bar{q}' = \bar{q} \cdot \bar{q}' \underset{m_0}{2} = \bar{q} \underset{\bar{2}}{m_0}{2} \cdot \bar{q}' \underset{\bar{2}}{m_0}{2} .$$

Où

$$\mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \bar{q} = (q, \sigma, \tau) \in \bar{P}^{-5} \text{ alors } \bar{q}_\mu = (q, \sigma + \mu\tau, \tau) ; \\ \text{et le produit scalaire dans } \mathcal{C}^6 \ni \bar{p} = (p, p_4, p_5) \\ \text{est } \bar{p} \cdot \bar{p}' = \underline{p} \cdot \underline{p}' - \frac{1}{2} (p_4 p'_5 + p'_4 p_5) ; \\ \text{le produit scalaire } \underline{p} \cdot \underline{p}' \text{ dans } \mathcal{C}^4 \ni \underline{p} \text{ est euclidien.} \end{array} \right.$$

Remarque : $(\bar{q}_\mu)_\nu = \bar{q}_{\mu+\nu}$, donc $\mu \mapsto (\bar{q} \mapsto \bar{q}_\mu)$, $\mathcal{C} \rightarrow \text{Aut } \bar{P}^5$ constitue un groupe à un paramètre complexe d'automorphisme de $\bar{P}^5$.

(b) L'éclatement dans $\bar{\Sigma}_q^4$ du point $\Omega_\sigma \in \bar{\Sigma}_q^4 \subset \bar{P}^5$.

(i) Dans le produit suivant muni de ses deux projections :

$$\bar{k} = (\underline{k}, v, p) \in \bar{P}_k^5 \xleftarrow{\pi_k} \bar{P}_k^5 \times \bar{P}_q^5 \xrightarrow{\pi_q} \bar{P}_q^5 \ni (q, \sigma, \tau) = \bar{q},$$

on considère le sous-ensemble suivant muni des projections induites**

$$\tilde{P}_q^5 = \{(\bar{k}, \bar{q}) \in \bar{P}_k^5 \times \bar{P}_q^5 \mid (\underline{k}, \rho) \wedge (q, \tau) = 0 \text{ et } v = 0\} \subset \bar{P}_k^5 \times \bar{P}_q^5$$

$$\bar{P}_k^4 \xleftarrow{\pi_k} \tilde{P}_q^5 \xrightarrow{\pi_q} \bar{P}_q^5 \quad \text{où } \bar{k} \mapsto (\bar{k}, \bar{q}) \mapsto \bar{q} ;$$

(ii) Alors $\tilde{P}_q^5 \xrightarrow{\pi_q} \bar{P}_q^5$ est un éclatement de Ω_σ dans $\bar{P}_q^5$ et

(iii) L'éclatement $\tilde{\Sigma}_q^4 \rightarrow \bar{\Sigma}_q^4$ de Ω_σ dans $\bar{\Sigma}_q^4$ est obtenu en considérant

* Ω_σ est une notation plus naturelle pour ce point

$\Omega_\sigma = \Omega_q = (q = 0, \sigma = 1, \tau = 0)$ dont la seule coordonnée non nulle est σ .

** on a posé $\bar{P}_k^4 = \{\bar{k} = (\underline{k}, v, \rho) \in \bar{P}_k^5 \mid v = 0\}$.

$\bar{\Sigma}_q^4 \subset \bar{P}_q^5$ (d'équation $\bar{q}^2 = 0$) comme plongé dans $\bar{P}_q^5$, et en prenant la restriction de la projection π_q à sa transformée stricte $\bar{\Sigma}_q^4 = \tilde{\Sigma}_q^4$ d'équation $\underline{k} \cdot \underline{q} = \rho\sigma$ dans $\tilde{P}_q^5$.

(c) L'éclatement $\tilde{\Sigma}_q^4 \times \tilde{\Sigma}_{q'}^4 \rightarrow \bar{\Sigma}_q^4 \times \bar{\Sigma}_{q'}^4$,

de centre $(\Omega_\sigma \times \tilde{\Sigma}_{q'}^4) \cup (\tilde{\Sigma}_q^4 \times \Omega_{\sigma'}) \subset \bar{\Sigma}_q^4 \times \bar{\Sigma}_{q'}^4$,

est donné alors par

$$\tilde{\Sigma}_q^4 \times \tilde{\Sigma}_{q'}^4 = \left\{ \begin{array}{c} (\bar{k}, \bar{q}) \\ \text{---} \\ (\bar{k}', \bar{q}') \end{array} \right\} \in \begin{array}{c} \bar{P}_k^5 \times \bar{P}_q^5 \\ \times \\ \bar{P}_{k'}^5 \times \bar{P}_{q'}^5 \end{array} \left| \begin{array}{l} (1) \quad (\underline{k}, \rho) \wedge (\underline{q}, \tau) = 0 \\ (2) \quad (\underline{k}', \rho') \wedge (\underline{q}', \tau') = 0 \\ (3) (4) \quad \underline{k} \cdot \underline{q} = \rho\sigma, \underline{k}' \cdot \underline{q}' = \rho'\sigma' \\ (v) (v') \quad v = v' = 0 \end{array} \right\} \subset \begin{array}{c} \bar{P}_k^4 \times \bar{P}_q^5 \\ \times \\ \bar{P}_{k'}^4 \times \bar{P}_{q'}^5 \end{array}$$

muni des projections :

$$((\underline{k}, 0, \rho), (\underline{k}', 0, \rho')) \leftarrow \left(\begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right) \rightarrow ((\underline{q}, \sigma, \tau), (\underline{q}', \sigma', \tau'))$$

$$\bar{P}_k^4 \times \bar{P}_{k'}^4 \leftarrow \tilde{\Sigma}_q^4 \times \tilde{\Sigma}_{q'}^4 \rightarrow \bar{\Sigma}_q^4 \times \bar{\Sigma}_{q'}^4$$

On obtient ainsi un objet géométrique propre

$$E_{\square} = \{s \subset s_D \subset \widetilde{\Sigma}_q^4 \times \widetilde{\Sigma}_{q'}^4, \times T_{\square} \rightarrow T_{\square}\}$$

$$\text{où } s = \{1, 2, 3, 4\}^s \cup s_o$$

avec $s_o = \bar{\mathcal{L}}$ fermeture de $(\pi_q \times \text{Id}_{T_{\square}})^{-1}$ ($\mathcal{L}$ -le centre d'explosion)

$$\text{et } s_i = \bar{M}_i$$

$$\text{et } \mathcal{D} = \pi_q^{-1} (\text{centre d'explosion}) \times T_{\square}.$$

On sait alors, d'après l'étude du graphe triangulaire et la remarque fondamentale de la fin de l'appendice F, que l'objet propre $E_{\square}$ est à croisements normaux sauf peut être en ce qui concerne $s_o = \bar{\mathcal{L}}$.

On est donc conduit à examiner en quels points s_o est singulier on n'est pas à croisements normaux avec $\{1, 2, 3, 4\}^s$.

Proposition

Les points de non position générale avec $s_o = \bar{\mathcal{L}}$ forment, (dans la fibre générique $\widetilde{\Sigma}_q^4 \times \widetilde{\Sigma}_{q'}^4$, de $E_{\square}$), la transformée stricte $\bar{\Delta}_k$ par π_k^{-1} de la diagonale :

$$\Delta_k \subset \bar{P}_{\infty}^3 \times \bar{P}_{\infty}^3 \subset \bar{P}_k^4 \times \bar{P}_{k'}^4.$$

Cette transformée stricte $\bar{\Delta}_k$ étant obtenue en adjoignant aux équations (1), (2), (3), (4), [qui définissent $\widetilde{\Sigma}_q^4 \times \widetilde{\Sigma}_{q'}^4$, dans $\bar{P}_k^4 \times \bar{P}_{k'}^4 \times \bar{P}_q^5 \times \bar{P}_{q'}^5$], les équations supplémentaires :

$$\bar{\Delta}_k \left| \begin{array}{l} (5) \quad \rho = \rho' = 0 \\ (6) \quad \underline{k} = \lambda \underline{k}' ; \lambda \neq 0 \end{array} \right. \quad \text{et}$$

Preuve

(1) Les points singuliers de $\mathcal{L}$ dans $\bar{\Sigma}_q^4 \times \bar{\Sigma}_{q'}^4$, sont les points

$(\bar{q}, \bar{q}') \in \bar{P}_q^5 \times \bar{P}_{q'}^5$, où les hypersurfaces

$$\bar{\Sigma}_q^4 \equiv \bar{q}^2 = 0$$

$$\bar{\Sigma}_{q'}^4 \equiv \bar{q}'^2 = 0$$

$$\mathcal{L} \equiv \bar{q} \cdot \bar{q}'_\mu \equiv \bar{q}_\mu \cdot \bar{q}' = 0 \quad (\mu = m_0^2)$$

ne sont pas en position générale ;

ie ceux où la matrice $\mathcal{L}_W$ suivante est de rang strictement inférieur à trois :

$$\mathcal{L}_W = \begin{vmatrix} \bar{\Sigma}_q^4 & 1 & \bar{q}^2 \\ \mathcal{L} & \bar{q} \cdot \bar{q}'_\mu & \\ \bar{\Sigma}_{q'}^4 & & \frac{1}{2} \bar{q}'^2 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{q}} & \bar{q} & \bar{q}'_\mu & 0 \\ \frac{\partial}{\partial \bar{q}'} & 0 & \bar{q}_\mu & \bar{q}' \end{vmatrix}$$

On sait que deux de ces surfaces sont en position générale, donc :

$$(\text{rang } \mathcal{L}_W) < 3 \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{q}^2 = 0 \\ \bar{q}'^2 = 0 \\ \bar{q}'_\mu = \lambda \bar{q} \\ \bar{q}_\mu = \lambda' \bar{q}' \end{cases} \quad \text{où } 0 \neq \lambda \lambda' \in \mathcal{O}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda \bar{q} = \bar{q}' \\ \lambda \neq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau = \tau' = 0 \quad (\text{si } \mu = m_0^2 \neq 0)^*$$

Remarque : ce lieu est le cône, image par $\bar{q} \mapsto (\bar{q}, \bar{q}')$, $\bar{\Sigma}^4 \rightarrow \bar{\Sigma}_q^4 \times \bar{\Sigma}_{q'}^4$, du cône quadratique section, dans $\bar{P}^5$, de $\bar{\Sigma}^4$ par son plan tangent en Ω .

* (si $\mu = m_0^2 = 0$ alors $(\text{rang } \mathcal{L}_W) < 3 \Leftrightarrow \lambda \bar{q} = \bar{q}' \quad \lambda \neq 0$

(2) Le lieu des points singuliers de $\bar{\mathcal{L}}$ dans $\widetilde{\Sigma}_q^4 \times \widetilde{\Sigma}_q^4$, est le transformé strict par π_q^{-1} du lieu précédent,

donc est bien le transformé strict $\bar{\Delta}_k$ par π_k^{-1} de la diagonale

$$\Delta_k \subset \bar{P}_\infty^3 \times \bar{P}_\infty^3 \subset \bar{P}_k^4 \times \bar{P}_k^4 .$$

(3) $\bar{\mathcal{L}}$ n'a pas d'autres points à "l'infini" que ceux de $\bar{\Delta}_k$

(ie $\bar{\mathcal{L}} = \bar{\Delta}_k \cup \Phi$), or Φ , Q_1 , Q_2 , Q'_3 , Q'_4 étaient en position générale ;

Ceci achève la démonstration de la proposition.

]

C H A P I T R E V I I I

E S S A I D E

L I B E R A T I O N E X P L I C I T E D E L A V A R I E T E

D ' I N T E G R A T I O N D ' U N G R A P H E Q U E L C O N Q U E

Le but du présent chapitre est de donner explicitement et pour un graphe quelconque, la séparation de la variété d'intégration vis à vis de la surface polaire. L'idée en a déjà été décrite pour le graphe triangulaire.

Evidemment, d'après le théorème démontré dans le chapitre VII, cela ne sera possible, du moins si l'on veut garder le même germe de fonction de Feynman, que dans le cas des graphes convergents, ie, dont le germe initial est bien défini.

I - RECHERCHE DES MAUVAIS POINTS D'UN GRAPHE G

a) Nous savons, d'après le chapitre II, que pour un graphe quelconque G et pour une valeur $t \in T_G$ du paramètre appartenant au domaine de définition de $[G, \underline{1} \in \mathbb{R}, \varepsilon = 0]$, l'intégrale à étudier voit sa chaîne d'intégration

$$\Gamma = \mathbb{R}_1^4 \times \dots \times \mathbb{R}_b^4 \times \dots \times \mathbb{R}_B^4 = \text{Partie réelle de } (\mathcal{C}^4)^B$$

(B = nombre de boucles)

sans point commun avec toute composante Q_j de sa surface polaire. De plus nous notons que pour un tel $t \in T_G$ les Q_j sont en position générale. Enfin, lorsque nous ne nous intéressons qu'à la position relative de Γ avec chaque Q_j séparément, nous pouvons toujours supposer sans diminuer la généralité que

$$Q_j \equiv Q_B = \underbrace{(\underline{a} + \underline{q}_1 + \underline{q}_2 + \dots + \underline{q}_b + \dots + \underline{q}_B)^2}_{= \underline{r}^2} + m^2 \quad . \quad \underline{q}_b \in \mathcal{C}_b^4$$

Les mauvais points où Q touche Γ sont donc à "l'infini", [et de même les points où les divers Q_j ne sont pas en position générale sont à "l'infini"] et nous voulons montrer qu'il existe une compactification algébrique astucieuse de $(\mathcal{C}^4)^B$, dans laquelle Γ devient un bon cycle relatif/qui ne touche pas la fermeture de Q . [et même il existe une compactification encore plus astucieuse de $(\mathcal{C}^4)^B$ dans laquelle en plus les diverses Q_j restent en position générale entre eux et avec la surface à l'infini].*

b) Première étape : compactification boucle par boucle $\mathcal{C}_b^4 \rightarrow \bar{\Sigma}_b^4$

Cette opération est bien une compactification : c'est en effet un plongement (sans déchirure) ouvert et dense de la variété algébrique non singulière $\mathcal{C}_b^4$ dans la variété algébrique compacte $\bar{\Sigma}_b^4$ non singulière.

Nous devons tout d'abord décrire ce qu'il advient de Γ et Q par cette opération [et accessoirement de la mesure $d_{q_1}^4 \wedge \dots \wedge d_{q_B}^4$ et l'intégrale] et chercher les points où $\bar{Q}$ et $\bar{\Gamma}$ s'y rencontreront.

$\bar{\Sigma}_b^4 \hookrightarrow P_b^5$ est définie par

$$\bar{\Sigma}_b^4 = \{ \bar{q}_b = (q_b, \sigma_b, \tau_b) \in \bar{P}_b^5 \mid \bar{q}_b^2 = 0 \}$$

et l'injection est obtenue par la substitution :

$$\mathcal{C}_b^4 \hookrightarrow \bar{\Sigma}_b^4 \quad q_b \mapsto (q_b/\tau_b, q_b^2/\tau_b^2 = \sigma_b/\tau_b, 1)$$

* Remarquons que nous n'avons pas trouvé par là un moyen de rendre convergente une intégrale qui ne l'était pas : si l'intégrale initiale diverge, avant transformation, alors la transformation de la mesure introduit une nouvelle surface polaire qui coupe Γ .

donc $\underline{r} = (\underline{a} + \underline{q}_1/\tau_1 + \dots + \underline{q}_b/\tau_b + \dots + \underline{q}_B/\tau_B)$

et Q_B devient $\frac{\mathcal{L}_B}{\tau_1 \dots \tau_B}$ où

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B = & \frac{1}{2} (\sigma_1 \tau_2 \dots \tau_B + \tau_1 \sigma_2 \tau_3 \dots \tau_B + \dots + \sigma_b \tau_1 \dots \hat{\tau}_b \dots \tau_B + \dots) \\ & + \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \tau_3 \dots \tau_B + \dots + \underline{q}_b \cdot \underline{q}_b \tau_1 \dots \hat{\tau}_b \dots \hat{\tau}_b \dots \tau_B + \dots \\ & + \underline{a} \cdot (\underline{q}_1 \tau_2 \dots \tau_B + \dots + \underline{q}_b \tau_1 \dots \hat{\tau}_b \dots \tau_B + \dots) \\ & + \frac{1}{2} (\underline{a}^2 + m^2) \tau_1 \dots \tau_B \end{aligned}$$

Tandis que Γ devient :

$$\bar{\Gamma} = \text{Re } \bar{\Sigma}_1^4 \times \dots \times \bar{\Sigma}_B^4 = \{(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_B) \mid \bar{q}_b \text{ réel } \forall b \in B\}.$$

Mais

$$\bar{\Gamma} \cap \mathcal{L}_B = \bar{\Gamma} \cap \mathcal{L}_B^\infty$$

où

$$\mathcal{L}_B^\infty = \mathcal{L}_B^{1^\infty} \cup \dots \cup \mathcal{L}_B^{b^\infty} \dots \cup \mathcal{L}_B^{B^\infty}$$

et

$$\mathcal{L}_B^{b^\infty} = \mathcal{L}_B \cap \{\tau_b = 0\} \quad \text{ie}$$

$$\mathcal{L}_B^{1^\infty} = \frac{1}{2}(\sigma_1 \tau_2 \dots \tau_B) + \sum_{b=2}^B \underline{q}_1 \cdot (\underline{a} \tau_b + \underline{q}_b) \tau_2 \dots \hat{\tau}_b \dots \tau_B$$

Mais

$$\bar{\Gamma} \cap \mathcal{L}_B^{1^\infty} \subset \{ \underline{\tau}_1 = 0, \underline{q}_1, \sigma_1 \text{ réels}, \underline{q}_1^2 = 0, \Rightarrow \underline{\sigma}_1 \neq 0 \text{ et } \underline{q}_1 = 0 \}$$

De sorte que

$$\bar{\Gamma} \cap \mathcal{L}_B^{1^\infty} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{\tau}_1 = 0, \underline{q}_1 = 0, \sigma_1 \neq 0, \text{ et } \frac{1}{2}(\sigma_1 \tau_2 \dots \tau_B) = 0 \\ \text{et } \bar{q}_2, \bar{q}_3, \dots, \bar{q}_B \text{ réels.} \end{array} \right\}$$

c'est-à-dire, en conclusion :

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma} \cap \mathcal{L}_B^{1\infty} &= \bigcup_{b=2}^B (\bar{\Gamma} \cap \mathcal{L}_B^{1\infty} \cap \mathcal{L}_B^{b\infty}) \\ &= \bigcup_{b=2}^B \operatorname{Re} (\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2)\end{aligned}$$

où l'on a adopté les conventions :

Ω_b désigne le point (de compactification de la partie réelle) :

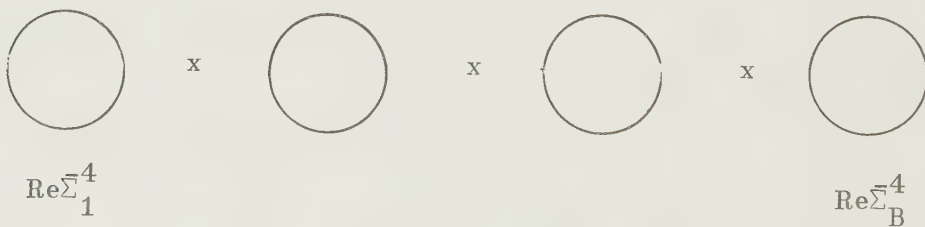
$$\Omega_b = \{\bar{q}_b \in \bar{\Sigma}_b^4 \mid q_b = \tau_b = 0, \sigma_b \neq 0\}$$

$\underline{\Omega}_b = p_b^{-1}(\Omega_b)$, en est l'image réciproque par la $b^{\text{ième}}$ projection :

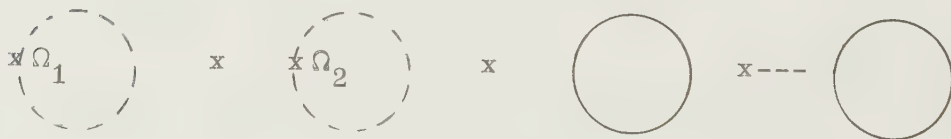
$$\bar{\Sigma}_1^4 \times \dots \times \bar{\Sigma}_b^4 \times \dots \times \bar{\Sigma}_B^4 \xrightarrow{p_b} \bar{\Sigma}_b^4 \ni \Omega_b$$

De plus on a posé : $\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_b = \underline{\Omega}_1 \cap \underline{\Omega}_b$.

$\bar{\Gamma}$



$\operatorname{Re}(\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2) = \bar{\Gamma} \cap \mathcal{L}_B^{1\infty} \cap \mathcal{L}_B^{2\infty}$



II - PREMIERS ECLATEMENTS GENERAUX

PREMIERS ECLATEMENTS GENERAUX

Nous avons donc tout d'abord à éclater la réunion

$$\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 \cup \underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_3 \cup \dots \cup \underline{\Omega}_b \times \underline{\Omega}_b, \dots$$

et même nous devons prévoir en raison de ce que l'on a vu pour le graphe triangulaire qu'il nous faudra éclater la réunion $\underline{\Omega}_1 \cup \underline{\Omega}_2 \cup \dots \cup \underline{\Omega}_B$.

$$\text{Notons que } \underline{\Omega}_1 \cap \underline{\Omega}_2 = \underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2$$

$$\underline{\Omega}_1 \cap \underline{\Omega}_2 \cap \underline{\Omega}_3 = \underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 \times \underline{\Omega}_3$$

et que $\underline{\Omega}_1, \underline{\Omega}_2, \dots, \underline{\Omega}_B$ sont sans singularités, de codimension 4 dans $\pi_1^B \Sigma^4$, en position générale dans $\pi_1^B \Sigma^4$,

et que les $\underline{\Omega}_b$ considérées comme multiplans de codimension 5 dans $\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$, sont en position générale et passent toutes par le point

$$\underline{\Omega}_1 \times \underline{\Omega}_2 \times \dots \times \underline{\Omega}_B = \underline{\Omega}_1 \cap \underline{\Omega}_2 \cap \dots \cap \underline{\Omega}_B.$$

DESCRIPTION GLOBALE

On effectuera l'éclatement cherché d'abord en réalisant celui de $\pi_1^B \bar{P}_b^5$ puis en prenant les transformées strictes de $\pi_1^B \Sigma_b^4$ puis de $\mathcal{L}_B$.
L'éclatement dans $\pi_1^B \bar{P}_b^5 = X$ sera le composé d'éclatements

$$\tilde{X} = X_B \xrightarrow{f_{B-1}} \longrightarrow X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X = X_0$$

où le transformé strict par $X_{i+1} \xrightarrow{f_i} X_i$ de $H \subset X_i$ se note $\bar{f}_i^*(H)$
 (ie $\bar{f}_i^*(H) = \overline{f_i^{-1}(H - D_i)}$ où D_i est le centre d'explosion).

Alors

$(B)_0$ $X_1 \xrightarrow{f_0} X_0$ est l'éclatement du seul point $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_B$. On constate que les $\bar{f}_0^*(\Omega_1 \times \dots \times \hat{\Omega}_b \times \dots \times \Omega_B)$ forment encore des "multiplans" non singuliers et de dimension 5 et sont à intersection vide deux à deux.

$(B)_1$ $X_2 \xrightarrow{f_1} X_1$ est l'éclatement de ces B multiplans. On constate que les $(f_1 \circ f_0)^*(\Omega_1 \times \dots \times \hat{\Omega}_b \times \dots \times \hat{\Omega}_{b'}, \dots \times \Omega_B)$ forment encore dans X_2 des "multiplans" non singuliers et de dimension $10 = 2 \times 5$ et sont à intersection vide deux à deux.

$(B)_2$ $X_3 \xrightarrow{f_2} X_2$ est l'éclatement de ces $(B)_2$ multiplans. On constate que les $(f_2 \circ f_1 \circ f_0)^*(\Omega_1 \times \dots \times \hat{\Omega}_b \times \dots \times \hat{\Omega}_{b'} \times \dots \times \hat{\Omega}_{b''} \dots \times \Omega_B)$ forment encore dans X_3 des "multiplans" non singuliers et de dimension $15 = 3 \times 5$ et ont 2 à 2 une intersection vide.

$(B)_3$ $X_4 \xrightarrow{f_3} X_3$ est l'éclatement de ces $(B)_3$ multiplans.

LA TECHNIQUE

Pour tout sous ensemble $\beta \subset \{1, 2, \dots, b, \dots, B\} = B$ de l'ensemble B des boucles du graphe G , désignons par :

- $|\beta|$ le nombre d'éléments de β ;
- β^c l'ensemble complémentaire de β dans B ;
- $\bigcap_{b \in \beta} \Omega_b \subset \bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$;

le multiplan du multiprojectif dont les coordonnées homogènes

$\bar{q}_b = (q_b, \sigma_b, \tau_b)$ vérifient $q_b = \tau_b = 0$ dès que b est pris dans β ;

- $\bar{P} = \bar{P}^{5\beta-1}$ l'espace projectif de dimension $5|\beta| - 1$

dont les coordonnées homogènes seront notées

$$\bar{q} = (\bar{q}_b)_{b \in \beta} \quad \text{où} \quad \bar{q}_b = (q_b, \tau_b) \in \mathbb{C}^5. \quad \forall b \in \beta$$

Alors, au-dessus de l'ouvert** défini par $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_B \neq 0$,

1°/ L'éclatement de $\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$ de centre le seul point B_Ω est donné par la restriction de la projection naturelle :

$$B_{\bar{P}} \times (\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5) \xrightarrow{f_0} \bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$$

à la variété définie par les relations suivantes entre les coordonnées $B_{\bar{q}}$ et $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_B)$:

$$\diamond \quad (\sigma_1^B q_1, \sigma_1^B \tau_1, \dots, \sigma_B^B \tau_B) \wedge (q_1, \tau_1, \dots, \tau_B) = 0$$

La transformée stricte $B_X \xrightarrow{f_0} X_0$ dans cet espace de $\bar{\Sigma}_1^4 \times \dots \times \bar{\Sigma}_B^4 = X_0$ sous cet éclatement est donné par les équations :

**En toute rigueur on devrait plonger le produit $\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$ comme variété de segré dans le projectif de dimension $6^B - 1$, faire les éclatements dans ce projectif puis y prendre les transformées strictes. Heureusement, au-dessus de l'ouvert précité, il y a isomorphisme avec notre construction

$$\left| \begin{array}{l} {}^B \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_1 = {}^B \tau_1 \sigma_1 \\ \vdots \\ {}^B \underline{q}_B \cdot \underline{q}_B = {}^B \tau_B \sigma_B \end{array} \right. .$$

Remarquons que pour tout couple de sous ensembles couvrant B

$\beta \subset \{1, \dots, B\} \supset \beta'$, $(\beta \cup \beta' = B)$ les transformées strictes par f_0 de $\beta_{\underline{\Omega}}$ et $\beta'_{\underline{\Omega}}$ sont disjointes.

2°/ Le sous ensemble $\gamma \subset \{1, \dots, B\}$ étant choisi, l'éclatement de $\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$ de centre le multiplan $\gamma_{\underline{\Omega}}$ est donné par la restriction de la projection naturelle

$$\left(\pi_{\gamma \subset \beta}^{\beta \bar{P}} \right) \times (\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5) \xrightarrow{f_{\gamma}} \bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5,$$

du produit des $\beta \bar{P}$, courant sur les β qui contiennent γ , (et de $\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$ à la sous variété formées des points dont les coordonnées vérifient pour tout couple d'ensembles emboîtés

$$\gamma \subset \delta \subset \beta,$$

- ♦ d'une part les relations ♦ données dans 1°/,
- ♦♦ d'autre part les relations entre coordonnées $\delta_{\bar{q}}$ et $\beta_{\bar{q}}$ définies par :
- ♦♦ $(\delta_{\bar{q}_1}, \delta_{\bar{q}_2}, \dots, \delta_{\bar{q}_{|\delta|}}) \wedge (\beta_{\bar{q}_1}, \dots, \beta_{\bar{q}_{|\delta|}}) = 0$

(pour simplifier l'écriture on a supposé que

$$\delta = \{1, 2, \dots, |\delta|\} \subset \beta \text{ au lieu de } \delta = \{i_1, \dots, i_{|\delta|}\} \subset \beta \subset B).$$

La transformée stricte :

$$\gamma_X \xrightarrow[\gamma]{f} X_0$$

de $\bar{\Sigma}_1^4 \times \dots \times \bar{\Sigma}_B^4 = X_0$ sous cet éclatement est donné dans cet espace par les équations

$$\mathbb{Z} \left| \begin{array}{l} \gamma_{\underline{q}_b} \cdot \underline{q}_b = \gamma_{\tau_b} \cdot \sigma_b \quad b \in \gamma \\ \text{pour tout } b \text{ pris dans } \gamma \end{array} \right.$$

3°/ Si $n + p = B$, alors l'éclatement de $\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$ de centre la réunion des multiplans $\gamma_{\underline{\Omega}}$ tels que $|\gamma| = p$ est la restriction de la projection naturelle

$$\left(\begin{array}{c} \pi \\ |\beta| \geq n \end{array} \right. \bar{P}) \times (\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5) \xrightarrow[p]{f} \bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$$

du produit des $\beta \bar{P}$ tels que $|\beta| \geq n$ (et de $\bar{P}_1^5 \times \dots \times \bar{P}_B^5$) à la sous-variété formée des points vérifiant $\spadesuit$ et $\spadesuit\spadesuit$ pour tout couple $\delta \subset \beta$ tel que $|\delta| \geq n$. La transformée stricte $X_p \xrightarrow[p]{f} X_0$ de $\bar{\Sigma}_1^4 \times \dots \times \bar{\Sigma}_B^4 = X_0$ sous cet éclatement est donnée par les équations

$$\left| \begin{array}{l} \gamma_{\underline{q}_b} \cdot \underline{q}_b = \gamma_{\tau_b} \cdot \sigma_b \\ \text{pour tout } |\gamma| \geq n \text{ et pour tout } b \in \gamma \end{array} \right.$$

4°/ Les γ_X et les X_p étant définis comme ci-dessus, il est évident que les projections naturelles induisent, pour tout couple $\gamma \subset \beta$ de sous ensembles de β ou pour tout couple d'entiers $p + r, p$, des éclatements :

$$f_{\beta\gamma} : \gamma_X \xrightarrow[f_{\beta\gamma}]{} \beta_X \quad \text{centré en } \bar{f}_{\beta}^*(\gamma_{\underline{\Omega}})$$

ou

$$f_{p,p+r} : X_{p+r} \xrightarrow{f_{p,p+r}} X_p \text{ centré en } \bar{f}_p^*(\beta_{\underline{\Omega}}) | \beta | \geq p+r.$$

De plus, on a les relations de transitivité de Chasles :

$$f_{\delta\beta} f_{\beta\gamma} = f_{\delta\gamma} \text{ dès que } \gamma \subset \beta \subset \delta,$$

$$\text{où } f_{p,p+r} \circ f_{p+r,p+r+1} = f_{p,p+r+1}.$$

Ces relations de chasles sont fondamentales pour la cohérence de notre construction.

5°/ Remarques fondamentales

- (i) Toutes les variétés γX et X_p sont compactes, algébriques, sans singularités et de dimension $4B$.
- (ii) L'image réciproque $f_{\gamma}^{-1}(\gamma_{\underline{\Omega}})$ est de codimension un et est algébrique et sans singularités.
- (iii) La transformée stricte $\bar{f}_{\gamma}^*(\gamma_{\underline{\Omega}})$ est vide.
- (iv) Le transformé strict par f_p de notre chaîne d'intégration est la partie réelle de X_p , $\Gamma_p = \bar{f}_p^*(\text{Re } X_o) = \text{Re } X_p$.

6°/ Réseaux

La chaîne d'éclatements

$$(1) \quad X_{B-1} \xrightarrow{f_{B-2,B-1}} X_{B-2} \xrightarrow{f_{B-3,B-2}} X_{B-3} \cdots \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$$

ayant ainsi été obtenue, il importe d'observer que tout nouveau choix de base de ${}^B\bar{P}$ donnée par une matrice à B lignes et B colonnes inversible à

coefficients 0, plus un ou moins un, du type

$$B_{\bar{P}} \quad \varphi \quad B_{\bar{P}}$$

$$(B_{q_1}^-, \dots, B_{q_b}^-, \dots, B_{q_B}^-) \mapsto B_{q_b}^- = \sum_{b'} \varphi_{bb'} B_{q_b}^-,$$

où

$$\varphi_{bb'} \in \begin{cases} +1 \\ 0 \\ -1 \end{cases}$$

donne à partir de X_1 , une nouvelle chaîne d'éclatements :

$$X_{B-1}^\varphi \rightarrow X_{B-2}^\varphi \rightarrow X_{B-3}^\varphi \rightarrow X_2^\varphi \rightarrow X_1^\varphi \rightarrow X_0$$

$$\parallel$$

$$X_1$$

construite à partir de X_1^φ c'est-à-dire à partir de X_1 muni de cette nouvelle base, exactement comme la précédente avait été construite à partir de X_1 , muni de sa base initiale.

Enfin, l'ensemble de ces diverses chaînes de But $X_1 \rightarrow X_0$ est un ensemble fini, et on peut en un sens évident, effectuer au-dessus de $X_1 \rightarrow X_0$, le produit fibré de ses divers éléments.

Le résultat est encore une chaîne d'éclatements que nous notons :

$$(2) \quad \bar{X}_{B-1} \rightarrow \bar{X}_{B-2} \rightarrow \dots \bar{X}_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0$$

Cette chaîne (2) et la chaîne génératrice (1) joueront des rôles également importants.

$\mathbb{Z} \parallel$ Remarquons qu'ils sont fixes et donc indépendants des valeurs des paramètres ($\underline{a}_i$, m_i^2 etc...) du graphe G.

7°/ Pour tout $\beta \subset B = \{1, 2, \dots, B\}$, on peut considérer $\mathcal{L}_\beta$ comme on avait considéré $\mathcal{L}_B$; $\mathcal{L}_\beta$ est construit à partir de $\mathcal{L}_B$ en remplaçant dans l'expression de $\mathcal{L}_B$ la coordonnée $\bar{q}_b = (q_b, \sigma_b, \tau_b)$ par celle de $(\underline{0}, 0, \underline{1})_b$ chaque fois que $b \in \beta$.

Rappelons que l'expression de $\mathcal{L}_B$ dans $X_0 = \bar{P}_1^5 x - x \bar{P}_B^5$ est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \frac{1}{2} \sigma_b \tau_1 \dots \hat{\tau}_b \dots \tau_B \\ &+ q_b \cdot q_c \tau_1 \dots \hat{\tau}_b \dots \hat{\tau}_c \dots \tau_B \\ &+ \underline{a}_B \cdot q_b \tau_1 \dots \hat{\tau}_b \dots \tau_B \\ &+ \frac{1}{2} (\underline{a}_B^2 + m^2) \tau_1 \tau_2 \dots \tau_B \end{aligned}$$

(où le signe de sommation n'a pas été indiqué, et où la somme court sur tous les $b \in B$ et sur tous les $b < c \in B$).

8°/ L'essai de dégagement final

Notre dernier problème consiste à trouver la transformée stricte ${}^B\mathcal{L}_B$ de $\mathcal{L}_B$ dans X_B et à déterminer où ${}^B\mathcal{L}_B$ et $\text{Re } X_B$ se rencontrent. On trouvera que ce lieu de rencontre n'est pas vide, ce qui oblige à de nouveaux éclatements.

Ces éclatements devraient* en fait se trouver réalisés dans une chaîne similaire à notre chaîne amplifiée N° 2, déjà écrite :

$$\bar{X}_B \rightarrow \bar{X}_{B-1} \dots \bar{X}_2 \rightarrow X_1 \rightarrow X_0.$$

* Je ne l'ai pas vérifié, et cette vérification sera entreprise dans les paragraphes suivants pour $B = 1, B = 2$, etc...

On trouvera ainsi que les transformées strictes ${}^B\bar{\mathcal{L}}_\beta$ de chacun des $\mathcal{L}_\beta$ est à intersection vide avec la nouvelle chaîne d'intégration $\text{Re}(\bar{X}_B)$ transformée stricte de $\text{Re}(X_0)$.

On aura ainsi réalisé le dégagement de la chaîne d'intégration de chaque composante de la variété polaire, pour obtenir un cycle $\text{Re}(\bar{X}_B)$ qui est à priori relatif et qui dans $\bar{X}_B$ borde dans l'image inverse $f_B^{-1}({}^B\Omega)$ diminuée de son intersection avec la transformée stricte ${}^B\bar{\mathcal{L}}_\beta$ de chacune des surfaces polaires $\mathcal{L}_\beta$; $\beta \in \{1, \dots, B\}$.

On aura :

$$\text{Re}(\bar{X}_B) \in H_{4B}(\bar{X}_B - {}^B\bar{\mathcal{L}}, f_B^{-1}({}^B\Omega) - {}^B\bar{\mathcal{L}})$$

où l'on a posé :

$${}^B\bar{\mathcal{L}} = \bigcup_{\beta \in B} {}^B\bar{\mathcal{L}}_\beta$$

$f_B : \bar{X}_B \rightarrow X_0$ est l'éclatement donné par la deuxième chaîne, et $f_B^{-1}({}^B\Omega)$ est toute l'image inverse dans $\bar{X}_B$ de ${}^B\Omega \in X_0$.

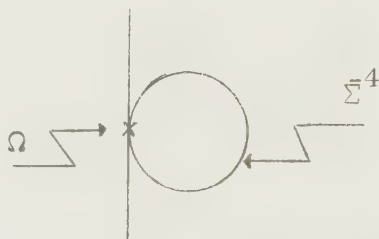
Comme nous l'avons déjà mentionné, $\text{Re}(\bar{X}_B)$ est une variété différentiable compacte ; par conséquent, elle définit, si elle est orientable, un cycle absolu ; alors on devra prendre : $\text{Re}(\bar{X}_B) \in H_{4B}(\bar{X}_B - {}^B\bar{\mathcal{L}})$

III - POUR MEMOIRE : $B = 1$. REALISATION DANS LE CAS D'UNE BOUCLE

1. $G = \square$

On a vu que si le graphe à une boucle avait au moins quatre lignes internes, alors la première étape suffit pour dégager la chaîne en un cycle absolu (et fournit même une intégrale de type standard strict absolu).

2. $G = \Delta$



Après la première compactification, la chaîne d'intégration $\text{Re}\bar{\Sigma}_1^4$ du graphe triangulaire a son point Ω_1 en commun avec le (sommet du) cône polaire section de $\bar{\Sigma}_1^4$ par son plan tangent en Ω_1 . Aucune des génératrice de ce cône n'a de direction réelle, c'est pourquoi l'éclatement de son sommet suffit à dégager la chaîne d'intégration, en un cycle relatif, comme cela est explicité pages 120-121.

Le tableau suivant donne cet éclatement :

$$X_1 \xrightarrow{f_0} X_0 = \bar{\Sigma}^4$$

Il se lit de droite à gauche ; la colonne de droite donne la situation avant éclatement ; la réunion de celle de gauche et de celle de droite donne la situation après éclatement : la chaîne d'intégration est la partie réelle de X_1 . C'est devenu un cycle relatif $H^4(X_1 - \bar{S}, P^3 - \bar{S})$

où $P^3 - \bar{S} = \{(\underline{q}, \sigma, \tau)(\underline{k}, \rho) \mid \underline{q} = \tau = 0, \rho = 0 \text{ et } \underline{k}^2 \neq 0\} \subset f^{-1}(\text{centre}) \cap X_1$.

Eclatement à décrire :	$ \begin{array}{c} X_1 \quad \xrightarrow{\quad f_0 \quad} \quad X_0 \\ \end{array} $	
Espace ambiant global	P^4	P^5
Point courant :	$(\underline{k}, \rho)$	$(\underline{q}, \sigma, \tau)$
Contraintes :	$(\underline{k}, \rho) \wedge (\underline{q}, \tau)$	
Variété ambiante stricte	$\underline{k} \cdot \underline{q} = \sigma \rho : \Sigma^4$	$\underline{q}^2 = \sigma \tau : \Sigma^4_q$
S Surfaces polaires à transformer	$\underline{k}^2 = 0, \rho = 0 : \bar{\tau}$ équation inchangée : $\bar{M}_j$	$\tau = 0 \quad \bar{\tau}$ $\bar{t}_j \cdot \bar{q} = 0 \quad \bar{M}_j$
Centre à éclater :	$f^{-1}(\text{centre}) \cap X_1 :$ $\bar{f}^*(S) \cap f^{-1}(\text{centre}) \cap X_1$ est sans point réel.	

Vérification du dégagement pour $G = \Delta$ (cf. rappel ci-contre)

Notre germe de fonction analytique pour $G = \Delta$, s'écrivait avant éclatement sous la forme non standard :

$$[\Delta, R, \varepsilon] \quad \int_{\text{Re } \bar{\Sigma}^4} \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \tau)}{\tau^2 M_1 M_2 M_3} = \int_{\text{Re } \bar{\Sigma}^4} \frac{\bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma)}{\sigma \tau M_1 M_2 M_3} .$$

Après l'éclatement $\bar{\Sigma}^4 = X_1 \xrightarrow{f_0} X_0 = \bar{\Sigma}^4$, de centre Ω , il s'écrit sous la forme standard (stricte) :

$$\text{Re } \bar{\Sigma}^4 \int \frac{\bar{\omega}}{\underline{k}_1^2 M_1 M_2 M_3}$$

où $\bar{\omega}$ est la restriction à $\bar{\Sigma}^4 = X_1$ de la quatre forme :

$$\bar{\omega} = (\underline{q}^2 / \underline{k}^2) \bar{\omega}'(\underline{k}, \sigma) - \frac{1}{2} \sigma \bar{\omega}'(\underline{k}) \wedge d(\underline{q}^2 / \underline{k}^2) .$$

(expression que nous avons omis d'écrire p.117).

Comme annoncé, notre chaîne $\bar{\Gamma} = \text{Re } \bar{\Sigma}^4$ est maintenant un cycle relatif⁺, qui borde dans $f_0^{-1}(\Omega) = P_k^3$ et qui ne rencontre plus nos variétés polaires qui sont bien les transformées strictes des anciennes.

(La transformée stricte de $\underline{q}^2 = 0$ est $\underline{k}^2 = 0$ et est sans point réel ; et $\bar{\omega}$ est régulière excepté précisément sur $\underline{k}^2 = 0$.)

⁺Si l'on peut montrer que $\text{Re } \bar{\Sigma}^4$ est orientable, alors on devra le considérer comme cycle absolu $\text{Re } \bar{\Sigma}^4 \in H_c^4(\bar{\Sigma}^4 - \bar{S})$

Rappel de calcul différentiel

Soit W une variété différentiable et $h = (h_0, h_1, \dots, h_p) : W \rightarrow \mathbb{C}^{p+1}$
et $\lambda : W \rightarrow \mathbb{C}$ deux morphismes différentiables.

On pose :

$$\mathbb{Z} \left\{ \begin{array}{l} d\lambda = \text{différentielle de } \lambda, \\ d^{p+1}h = dh_0 \wedge dh_1 \wedge \dots \wedge dh_p. \\ \bar{\omega}'(h) = \bar{\omega}'(h_0, \dots, h_p) = \sum_{i=0}^p (-1)^i h_i dh_0 \wedge \dots \wedge \widehat{dh_i} \wedge \dots \wedge dh_p = \sum_{i=0}^p \frac{h_i}{dh_i} d^{p+1}h. \end{array} \right.$$

on a alors les formules suivantes :

$$(1) \quad \bar{\omega}'(\lambda h) = \lambda^{p+1} \bar{\omega}'(h) \quad [\text{et si } h_0 \neq 0 \quad \frac{1}{h_0^{p+1}} \bar{\omega}'(h) = \bar{\omega}'(\frac{h}{h_0}) = d(\frac{1}{h_0}) \wedge \dots \wedge d(\frac{h_p}{h_0})].$$

$$(2) \quad \bar{\omega}'(h_0, \dots, h_p, k_0, \dots, k_r) = \bar{\omega}'(h) \wedge d^{r+1}k + (-1)^{p+1} (d^{p+1}h) \wedge \bar{\omega}'(k) \quad .$$

un cas particulier de (2) est :

$$(3) \quad \bar{\omega}'(h, \lambda) = \bar{\omega}'(h) \wedge d\lambda + (-1)^{p+1} \lambda d^{p+1}h \quad \text{et} \quad \bar{\omega}'(h, 1) = (-1)^{p+1} d^{p+1}h$$

Et en évaluant de deux façons à l'aide de (1) et (2) l'expression de $\bar{\omega}'(\lambda h, \lambda^2)$, on trouve

$$(4) \quad d^{p+1}(\lambda h) = \lambda^{p+1} d^{p+1}h + (-1)^p \frac{\lambda^{p-1}}{2} \bar{\omega}'(h) \wedge d(\lambda^2) \quad .$$

Enfin de (3) on déduit que l'égalité $\underline{q}^2 = \sigma \tau$ entraîne

$$(5) \quad \frac{1}{\tau} \bar{\omega}'(\underline{q}, \tau) + \frac{1}{\sigma} \bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma) = 0$$

De plus si (6) : $\underline{q} = \lambda \underline{k}$, alors (7) $\underline{q}^2 = \lambda^2 \underline{k}^2$

$$\text{et (8) : } d^4 \underline{q} = \lambda^2 [\lambda^2 d^4 \underline{k} - \frac{1}{2} \bar{\omega}'(\underline{k}) \wedge d(\lambda^2)]$$

$$\text{et donc (9) : } \bar{\omega}'(\underline{q}, \sigma) = \lambda^2 [\lambda^2 \bar{\omega}'(\underline{k}, \sigma) - \frac{1}{2} \sigma \bar{\omega}'(\underline{k}) \wedge d(\lambda^2)] \quad]]$$

IV - B = 2. REALISATION DANS LE CAS DE DEUX BOUCLES

La surface polaire

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 = & \frac{1}{2}(\sigma_1 \tau_2 + \sigma_2 \tau_1) + \underline{q}_1 \cdot \underline{q}_2 \\ & + \underline{a} (\underline{q}_1 \tau_2 + \underline{q}_2 \tau_1) + \frac{1}{2}(\underline{a}^2 + \mu) \tau_1 \tau_2 \end{aligned}$$

touche la chaîne d'intégration $\text{Re}(\bar{\Sigma}_1^4 \times \bar{\Sigma}_2^4)$ au seul point $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Le tableau suivant donne le premier éclatement

$$X_1 \xrightarrow[f_0]{} X_0 = \bar{\Sigma}_1^4 \times \bar{\Sigma}_2^4$$

de centre : $\Omega_1 \times \Omega_2$

La fibre du seul point éclaté de l'espace ambiant global est P^9 (le projectif de dimension 9). Celle du seul point éclaté de l'espace étudié $\bar{\Sigma}_1^4 \times \bar{\Sigma}_2^4 = X_0$ est P^7 (défini dans P^9 par $\rho_1 = \rho_2 = 0$).

La transformée $\bar{\mathcal{L}}_2$ de la seule surface dangereuse $\mathcal{L}_2$ coupe cette fibre en $\underline{q}_1 = \underline{q}_2 = \tau_1 = \tau_2 = \rho_1 = \rho_2 = 0$ et $(\underline{k}_1 + \underline{k}_2)^2 = 0$, qui admet des points réels qui sont ceux du triplan P^3 défini dans la fibre P^7 par $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0$; on a l'inclusion $P^3 \subset P^7 \subset P^9$. L'éclatement suivant (f_1) aura pour centre une variété bien plus grande que ce P^3 puisque cette variété définie par $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0$ $\rho_1 = \rho_2 = 0$, se projette par f_0 sur $X_0 = \bar{\Sigma}_1^4 \times \bar{\Sigma}_2^4$ en $\underline{q}_1 + \underline{q}_2 = 0$, $\tau_1 = \tau_2 = 0$ $\underline{q}_1^2 = 0$ (qui est le lieu singulier de $\mathcal{L}_2$). Cet éclatement sera suffisant lorsque $\underline{a} = 0$.

Eclatement :	$X_2 \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_0} X_0 = \Sigma_1^4 \times \Sigma_2^4 \subset P_1^5 \times P_2^5$
Espace ambiant global	$\left. \begin{array}{c} P^5 \\ P^9 \end{array} \right\}$
Point courant et	$(\underline{k}_1, \rho_1, \underline{k}_2, \rho_2)$ $(\underline{q}_1, \sigma_1, \tau_1)(\underline{q}_2, \sigma_2, \tau_2)$
Contrainte (Centre)	$\Lambda(\underline{k}_1 + \underline{k}_2, \rho_1, \rho_2) = 0$ $\Lambda(\sigma_2 \underline{q}_1, \sigma_2 \tau_1, \sigma_1 \underline{q}_2, \sigma_1 \tau_2) = 0$
Variété ambiante et $\bar{f}^*$	$f_0^{-1}(\text{centre}) \cap \bar{f}_0^*(X_0) : \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = 0 \\ \rho_2 = 0 \end{array} \right\}$ et $\underline{q}_1 = \underline{q}_2 = \tau_1 = \tau_2 = 0$ $\left. \begin{array}{l} \underline{q}_1^2 = \sigma_1 \tau_1 \\ \underline{q}_2^2 = \sigma_2 \tau_2 \end{array} \right\} \begin{array}{l} X_0 \\ \parallel \\ \Sigma_1^4 \times \Sigma_2^4 \end{array}$
Surface polaire principale	$\underline{f}_2 \equiv (\sigma_2 \underline{q}_1 + \sigma_1 \underline{q}_2)^2 + [2\bar{a} \cdot (\tau_2 \underline{q}_1 + \tau_1 \underline{q}_2) + (a^2 + \mu) \tau_1 \tau_2] \sigma_1 \sigma_2$ $\bar{f}_0^*(\underline{f}_2) \equiv \bar{\underline{f}}_2 \equiv (k_1 + k_2)^2 + 2\bar{a} \cdot (k_1 \rho_2 + k_2 \rho_1) + (a^2 + \mu) \rho_1 \rho_2$
alors	$\bar{f}_0^*(\underline{f}_2) \cap f_0^{-1}(\text{centre})$ est $(\underline{k}_1 + \underline{k}_2)^2 = 0, \underline{q}_1 = \underline{q}_2 = \rho_1 = \rho_2 = \tau_1 = \tau_2 = 0$

et donc $\bar{\underline{f}}_2$ admet des points réels à savoir $\underline{k}_1$ réel, $\underline{k}_2$ réel, avec $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0, \underline{q}_1 = \dots = 0$.
Et il faudra éclater ce nouveau centre dans X_1

Le f_1 réalise un éclatement de $(\underline{k}_1 + \underline{k}_2, \rho_1, \rho_2) = 0$ dans l'espace ambiant global.

La transformée stricte de $X_0 = \bar{\Sigma}_1 \times \bar{\Sigma}_2$ vérifie l'équation

$$(s_2 - s_1) = \underline{r}(\underline{q}_2 - \underline{q}_1).$$

L'éclatement composé $(f_1 \circ f_0)$ de $X_0 = \bar{\Sigma}_1 \times \bar{\Sigma}_2$ a pour centre la variété de dimension trois $\Delta^{3\infty}$ ("antidiagonale de l'infini" de $\bar{\Sigma}_1^4 \times \bar{\Sigma}_2^4$) définie par

$$(\underline{q}_1 + \underline{q}_2, \tau_1, \tau_2, \underline{q}_1^2) = 0.$$

L'image inverse du centre est une variété de dimension sept, c'est-à-dire de codimension un dans $\overline{(f_1 \circ f_0)^* (\bar{\Sigma}_1 \times \bar{\Sigma}_2)}$; elle est définie au-dessus de $(\Delta^{3\infty} - \Omega_1 \times \Omega_2)$ par la sous variété du produit $(\Delta^{3\infty} - \Omega_1 \times \Omega_2) \times P^5$ d'équation $(s_1 - s_2) = \underline{r} \cdot (\underline{q}_1 - \underline{q}_2)$ la fibre est donc un 4-plan tournant dans P^5 lorsque $(\underline{q}_1, \underline{q}_2)$ parcourt la base; enfin la fibre de $\Omega_1 \times \Omega_2$ c'est-à-dire

$$(f_1 \circ f_0)^{-1} (\Omega_1 \times \Omega_2) \cap \overline{(f_1 \circ f_0)^* (\bar{\Sigma}_1 \times \bar{\Sigma}_2)}$$

est la réunion de

$$P^7 - P^3 = \{(\underline{k}_1, \underline{k}_2) \in P^7 \mid \underline{k}_1 + \underline{k}_2 \neq 0\} \subset P^7$$

et de
$$P^3 \times P^4 = \{(\underline{k}_1, \underline{k}_2) \times (\underline{r}, s_1, s_2) \mid \underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0 \text{ et } s_1 = s_2\} \subset P^7 \times P^5$$

convenablement raccordés.

Pour calculer $\bar{f}_1^*(\bar{\mathcal{L}}_2)$, on travaille dans la carte :

$$\left. \begin{array}{l} \lambda \underline{r} = \underline{k}_1 + \underline{k}_2 \\ \lambda s_1 = \rho_1 \\ \lambda s_2 = \rho_2 \\ \underline{k}_1 \\ \nu \underline{k}_1 \sigma_1 = \underline{q}_1 \\ \nu \underline{k}_2 \sigma_2 = \underline{q}_2 \\ \nu \rho_1 \sigma_1 = \tau_1 \\ \nu \rho_2 \sigma_2 = \tau_2 \\ \lambda \nu \neq 0 \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{alors l'équation de } \bar{f}_0^*(\mathcal{L}_2) = \bar{\mathcal{L}}_2 \\ \text{donne l'égalité :} \\ \lambda^2 (\underline{r}^2 + 2 \underline{a} \underline{r} s_1 + (a^2 + \mu) s_1 s_2) + \lambda^2 \underline{a} \cdot \underline{k}_1 (s_2 - s_1) = 0 \end{array}$$

L'intersection de $\bar{f}_1^*(\bar{\mathcal{L}}_2)$ et de l'image inverse du centre est alors donnée au-dessus de chaque point $\underline{k}_1$ du centre par l'annulation du terme non identiquement nul de plus bas degré en λ .

En plus il faut tenir compte de $(s_1 - s_2) = \underline{r} \cdot (\underline{q}_1 - \underline{q}_2)$.

Ainsi, au-dessus du centre $\Delta^{3\infty}$ de f_1 o f_0 , la transformée stricte $\bar{\mathcal{L}}_2 = (\overline{f_1 \circ f_0})^*(\mathcal{L}_2)$ a pour "fibre" dans P^5 (au-dessus de $(\Delta^{3\infty} - \Omega_1 \times \Omega_1)$) ou dans $P^5 \times P^7$ (au-dessus de $\Omega_1 \times \Omega_1$) :

$$1^\circ / P^3 = \{(\underline{r}, s_1, s_2) \mid s_1 = s_2, \underline{r} \cdot \underline{q}_1 = 0\} \subset P^5 \quad \text{si } \underline{a} \cdot \underline{q}_1 \neq 0$$

$$2^\circ / \{(\underline{r}, s_1, s_2) \mid (\underline{r} + \underline{a} s_1)^2 + \mu s_1 s_2 + \underline{a}^2 s_1 \underline{r} (\underline{q}_2 - \underline{q}_1) = 0\} \subset P^5 \quad \text{si } \underline{a} \cdot \underline{q}_1 = 0$$

$$\text{et } s_1 - s_2 = \underline{r} \cdot (\underline{q}_1 - \underline{q}_2) \quad \text{et } \underline{q}_1 \neq 0.$$

$$3^{\circ}/ \{(\underline{r}, s_1, s_2) \times (\underline{k}_1, \underline{k}_2) | (\underline{k}_1 + \underline{k}_2)^2 = 0, (\underline{r} \wedge \underline{k}_1 + \underline{k}_2) = 0, s_1 = s_2\} \subset P^5 \times P^7$$

$$\text{si } \underline{q}_1 = 0 \text{ et } \underline{k}_1 + \underline{k}_2 \neq 0$$

$$4^{\circ}/ \{(\underline{r}, s_1, s_2) \times (\underline{k}_1, \underline{k}_2) | s_1 = s_2, \underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0\} \text{ si } \underline{q}_1 = 0 \text{ et } \underline{a} \cdot \underline{k}_1 \neq 0$$

$$5^{\circ}/ \{(\underline{r}, s_1, s_2) \times (\underline{k}_1; \underline{k}_2) | s_1 = s_2, (\underline{r} + \underline{a}s_1)^2 + \mu s_1 s_2\} \text{ si } \underline{q}_1 = 0 \text{ et } \underline{a} \cdot \underline{k}_1 = 0$$

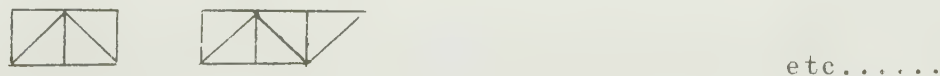
$$\text{et } \underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0$$

$$\text{et } \underline{k}_1 \neq 0.$$

De cette analyse, on voit que :

- (i) Si $\underline{a}$ est différent de zéro, l'éclatement f_1 ne suffit pas à dégager la chaîne.
- (ii) Si, au contraire, $\underline{a}$ est nul, alors l'éclatement f_1 suffit à dégager la chaîne de $3^{\circ}/$ de $4^{\circ}/$ et de $5^{\circ}/$ seuls $3^{\circ}/$ et $5^{\circ}/$ sont présents. Or ils n'ont pas de points réels.]]].

Ce cas (ii) est important, il couvre notamment les diagrammes suivants :



Vérification du dégagement pour $G = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$ (sur la carte $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$)

Notre germe de fonction analytique pour $G = \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}$, s'écrivait avant éclatement sous la forme non standard :

$$\left[\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array}, \mathbb{R}, \varepsilon \right] \quad \int \frac{d^4 \underline{q}_1 \wedge d^4 \underline{q}_2}{\text{Re}(\bar{\Sigma}^4_x \bar{\Sigma}^4) \prod_{M_0 M_1 M_2 \mathcal{L}_2 M'_3 M'_4 M'_5}} \quad , \quad (\text{Cf. p. 182})$$

s'écrit maintenant après l'éclatement $\bar{\Sigma}^4_x \bar{\Sigma}^4 = X_2 \frac{f_1^0 f_0}{X_0} X_0 = \bar{\Sigma}^4_x \bar{\Sigma}^4$,
sous la forme standard :

$$\text{Re}(\bar{\Sigma}^4_x \bar{\Sigma}^4) \int \frac{d^4 \underline{q}_1 \wedge [\bar{\omega}_r]}{\prod_{M_0 M_1 M_2 \bar{\mathcal{L}}_2 M'_3 M'_4 M'_5}}$$

où

$$\bar{\omega}_r = (\mathcal{L}_2 / \bar{\mathcal{L}}_2) d^4 \underline{r} + d(\mathcal{L}_2 / 2\bar{\mathcal{L}}_2) \wedge \bar{\omega}'(\underline{r})$$

où

$$\begin{cases} \mathcal{L}_2 &= (\sigma_2 \underline{q}_1 + \sigma_1 \underline{q}_2)^2 + \mu \tau_1 \tau_2 \sigma_1 \sigma_2 \\ \bar{\mathcal{L}}_2 &= \underline{r}^2 + \mu s_1 s_2 \\ d^4 \underline{r} &= dr_0^\wedge dr_1^\wedge dr_2^\wedge dr_3 \\ \bar{\omega}'(\underline{r}) &= r_0 dr_1^\wedge dr_2^\wedge dr_3 - r_1 dr_0^\wedge dr_2^\wedge dr_3 + \dots \end{cases}$$

Comme nous l'avons annoncé, notre chaîne $\bar{\Gamma} = \text{Re}(\bar{\Sigma}^4_x \bar{\Sigma}^4)$ est maintenant un cycle relatif⁺ qui borde dans $(f_1 \circ f_0)^{-1}(\Delta^3)$ et qui ne rencontre plus nos variétés polaires qui sont bien les transformées strictes ($\bar{\mathcal{L}}_2$ est la transformée stricte de $\mathcal{L}_2$) des anciennes.]]

La nouvelle forme de l'intégrale pour $G = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ est un peu plus compliquée à écrire.

⁺ Si l'on peut montrer que $\text{Re}(\bar{\Sigma}^4_x \bar{\Sigma}^4)$ est orientable, alors $\bar{\Gamma}$ sera un cycle relatif.

Pour être complet, remarquons que notre éclatement f_1 est compatible avec les éclatements des images inverses strictes par f_0 de $\underline{\Omega}_1$ et de $\underline{\Omega}_2$.

En effet le centre de f_1 ie $(\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0, \rho_1 = 0, \rho_2 = 0)$ est disjoint de $\underline{\Omega}_1$ ie $(\underline{k}_1 = \rho_1 = 0)$ ainsi que de $\underline{\Omega}_2$ ie $(\underline{k}_2 = \rho_2 = 0)$, eux-mêmes disjoints entre eux. L'étude de ces deux derniers éclatements est strictement la même que celle faite page 203. dans le cas du graphe à une boucle.]

Examen de l'objet géométrique obtenu pour $G = \emptyset$

L'intégrale est devenue de type standard (peut être strict)

(Cf. définition 1ter page 3).

L'objet géométrique associé (Cf. p. 177) par notre méthode est

$$\widetilde{E}_{\emptyset} = (\bar{s} \subset (\bar{s} \cup \widetilde{\mathfrak{D}}) \subset \widetilde{X \times T} \rightarrow T)$$

où $\widetilde{X \times T}$ est de la forme $\widetilde{X} \times T$

et où $\widetilde{\mathfrak{D}}$ est de la forme $\widetilde{D} \times T$

Puisque nos éclatements sont indépendants de la valeur des paramètres.

Décrivons explicitement chaque espace et son point courant.

L'espace des paramètres reste ce qu'il est :

$$\boxed{T} \quad T \ni (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{t}_4) \quad ; \quad \bar{t}_i = (\underline{a}_i, -(\underline{m}_i^2 + \underline{a}_i^2), -1) \in \mathcal{O}_i^5$$

$$\boxed{X} \quad X = \Sigma_{q_1}^4 \times \Sigma_{q_2}^4 \subset P_{q_1}^5 \times P_{q_2}^5 \ni (\underline{q}_1, \sigma_1, \tau_1) \times (\underline{q}_2, \sigma_2, \tau_2) = (\bar{q}_1, \bar{q}_2)$$

Nous ne donnons pas la description complète de $\widetilde{X} \rightarrow X$ par ce que nous

renonçons du moins pour le moment à plonger le multiprojectif $P_1^5 \times P_2^5$ dans

un unique projectif P^{35} à la Segré.

Nous donnons seulement la description de la partie $\tilde{Z}$ de $\tilde{X}$ qui se trouve au-dessus de l'ouvert dense $Z \subset X$ induit sur X par la carte :

$$\phi_9^{10} = \{(q_1, \sigma_1, \tau_1) \times (q_2, \sigma_2, \tau_2) \in P_1^5 \times P_2^5 \mid \sigma_1 = \sigma_2 = 1\}.$$

Alors si le multiprojectif $P_{h_1}^4 \times P_{h_2}^4 \times P_r^5 \times P_k^9 \times \phi_9^{10}$ a pour point courant :

$$(\underline{h}_1, \alpha_1) \times (\underline{h}_2, \alpha_2) \times (\underline{r}, s_1, s_2) \times (\underline{k}_1, \underline{k}_2, \rho_1, \rho_2) \times (q_1, q_2, \tau_1, \tau_2),$$

$\tilde{Z}$ en est le sous espace indépendant des paramètres et défini par :

$$\boxed{\tilde{Z}} \left\{ \begin{array}{ll} (1) & (\underline{k}_1, \underline{k}_2, \rho_1, \rho_2) \wedge (q_1, q_2, \tau_1, \tau_2) = 0 \\ (2) & (\underline{r}, s_1, s_2) \wedge (\underline{k}_1 + \underline{k}_2, \rho_1, \rho_2) = 0 \\ (5) & \underline{h}_1 \cdot q_1 = \alpha_1 \quad (3) \quad (\underline{h}_1, \alpha_1) \wedge (\underline{k}_1, \rho_1) = 0 \\ (6) & \underline{h}_2 \cdot q_2 = \alpha_2 \quad (4) \quad (\underline{h}_2, \alpha_2) \wedge (\underline{k}_2, \rho_2) = 0 \\ & (7) \quad (s_1 - s_2) = \underline{r} \cdot (q_1 - q_2) \end{array} \right.$$

De sorte que $\widetilde{Z \times T} = Z \times \tilde{T}$

Tandis que

$$\boxed{\tilde{S}} \quad \tilde{S} = \bigcup_{t \in T} \tilde{S}(t) \subset \tilde{Z} \times T \quad \text{est donné}$$

(Ce point reste peut être à vérifier Cf. discussion chap. VII et annexe E.7)
par la réunion des transformées strictes des composantes (Cf. p. 182)

$$\tilde{S} = \tilde{\tau} \cup \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 \cup \tilde{L} \cup \bar{M}_3' \cup \bar{M}_4' \cup \tilde{\tau}'$$

dont les équations en $\tilde{Z} \times T$ sont :

$$\overline{\tau} : \underline{h}_1^2 = 0, \quad \alpha_1 = 0 \quad (\text{indépendante de } t \in T)$$

$$\overline{\tau}' : \underline{h}_2^2 = 0, \quad \alpha_2 = 0 \quad (\text{indépendante de } t \in T)$$

$$\bar{M}_1 : \underline{k}_1 \cdot \bar{t}_1 = 0$$

$$\bar{M}_2 : \underline{k}_1 \cdot \bar{t}_2 = 0$$

$$\bar{M}_3' : \underline{k}_2 \cdot \bar{t}_3 = 0$$

$$\bar{M}_4' : \underline{k}_2 \cdot \bar{t}_4 = 0$$

$$\bar{x} : \underline{r}^2 + \mu s_1 s_2 = 0$$

Enfin $\mathfrak{D}$ est $\mathfrak{D} = D \times T$

où D a déjà été décrit page 206 et correspond aux équations (qui s'ajoutent aux équations (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) :

$$\begin{array}{l}
 \text{(A)} \quad \left. \begin{array}{l} \underline{q}_1 + \underline{q}_2 = 0 \quad \underline{q}_1^2 = 0 \\ \tau_1 = \tau_2 = \rho_1 = \rho_2 \\ \alpha_1 = \alpha_2 = 0 \end{array} \right\} \text{ ie } \Delta^{3\infty} \\
 \text{(B)} \quad \begin{array}{l} (\underline{r}) \wedge (\underline{k}_1 + \underline{k}_2) = 0 \\ (\underline{h}_1) \wedge (\underline{k}_1) = 0 \\ (\underline{h}_2) \wedge (\underline{k}_2) = 0 \end{array}
 \end{array}$$

où (A) définit un multiprojectif se projetant sur $\Delta^{3\infty} \cup \underline{\Omega}_1 \cup \underline{\Omega}_2$ et qui est :

$$P_{h_1}^3 \times P_{h_2}^3 \times P_r^5 \times P_k^7 \times (\Delta^{3\infty} \cup \underline{\Omega}_1 \cup \underline{\Omega}_2) ;$$

et où (B) décrit dans (A) une variété algébrique non singulière que l'on peut se représenter ainsi :

$$\text{Dans } \bar{\Sigma}_1^4 \times \bar{\Sigma}_2^4$$

- 0) La base $(\Delta^{3\infty} \cup \underline{\Omega}_1 \cup \underline{\Omega}_2)$ est tout d'abord remplacée par son produit avec $P^7 \ni (\underline{k}_1, \underline{k}_2)$
- 1) Dans la fibre P^7 , et au-dessus de $\underline{\Omega}_1$, le 3-plan P_1^3 défini par $\underline{k}_1 = 0$, est remplacé par son produit avec $P_{h_1}^3$.
- 2) Dans la fibre P^7 , mais au-dessus de $\underline{\Omega}_2$, le 3-plan P_2^3 défini par $\underline{k}_2 = 0$, est remplacé par son produit avec $P_{h_2}^3$.
- 3) Dans la fibre P^7 , mais au-dessus de $\Delta^{3\infty}$ le 3-plan P_{12}^3 défini par $\underline{k}_1 + \underline{k}_2 = 0$ est remplacé par la sous-variété de son produit avec $P^5 \ni (\underline{r}, s_1, s_2)$ d'équations $(s_1 - s_2) = \underline{r} \cdot (\underline{q}_1 - \underline{q}_2)$.]]

Remarque sur l'emploi de variété de Segré

L'éclatement de $\Omega \times \Omega' \in P_q^5 \times P_{q'}^5 \ni \bar{q} \times \bar{q}'$ au-dessus de $P^5 \times P^5$ tout entier peut se faire ainsi :

On pose : $\bar{q} = (q_i) \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad (q_0 = \text{notre ancien } \sigma)$

$$\bar{q}' = (q'_j) \quad j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P^{35} \ni \bar{\bar{q}} = (q_{ij}) \quad i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5 .$$

On injecte $P^5 \times P^5$ dans P^{35} comme sous variété fermée :

$$P^5 \times P^5 \hookrightarrow P^{35}$$

$$\text{par} \quad (q_i) \times (q'_j) \mapsto q_{ij} = q_i q'_j .$$

Autrement dit on considère $P^5 \times P^5$ comme la sous variété de P^{35} , définie par les relations de cocycles :

$$q_{ij} q_{ji} = q_{ii} q_{jj} \quad \text{Pour tout couple } (i, j)$$

$$q_{ij} q_{jk} q_{ki} = q_{ii} q_{jj} q_{kk} \quad \text{pour tout triplet } (i, j, k)$$

$$q_{ij} q_{ik} q_{kl} q_{ei} = q_{ii} q_{jj} q_{kk} q_{ee} \quad \text{pour tout } (i, j, k, l)$$

etc...

$\Omega \times \Omega'$ était défini dans $P^5_q \times P^5_{q'}$, par la nullité de toutes les coordonnées sauf q_0 et q'_0 . Son image dans P^{35} est défini par la nullité de toutes les coordonnées sauf q_{00} .

Son éclatement dans P^{35} est donné dans le produit $P^{34} \ni (k_{ij})_{i+j \neq 0}$ $i, j \in 0, 1, 2, 3, 4, 5$ par les relations :

$$\diamond \quad (k_{ij}) \wedge (q_{ij}) = 0 \quad i + j \neq 0 .$$

On remarque qu'au-dessus de la carte $q_0 \neq 0$, $q'_0 \neq 0$ de $P^5 \times P^5$, les relations suivantes suffisent à déterminer la situation :

$$\diamond\diamond \quad (k_{ij}) \wedge (q_{ij}) = 0 \quad \text{avec } i + j \neq 0 \quad \text{et } ij = 0$$

(autrement dit la partie des relations $\diamond$ qui concerne les couples i, j tels que $ij > 0$ est superflue).

Si l'on pose $(k_{i0}) = \bar{k}$; $(k_{0j}) = \bar{k}'$

$$(q_{i0}) = (q_i q'_0) = \bar{q} q'_0 ; (q_{0j}) = (q_0 q'_j) = q_0 \bar{q}' ,$$

les relations ♦♦ s'écrivent alors

$$(\bar{k}, \bar{k}') \wedge (\bar{q} q'_0, q_0 \bar{q}') = 0$$

et sont celles que nous avons utilisé.

Ceci justifie complètement le traitement que nous avons donné.

C'est fort heureux car dans le cas $B = 4$, le multiprojectif $P^5 \times P^5 \times P^5 \times P^5$, se plonge dans un plan projectif de dimension 1295 !

Remarque : Dans la variété de Segré correspondant à $(P^5)^B$, l'équation de $\mathcal{L}_B$ est linéaire, c'est

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_B &= \frac{1}{2}(q_{055\dots5} + \dots) + \frac{1}{2}(\underline{a}^2 + m^2) q_{55\dots5} \\ &+ \sum_{i=1}^4 (q_{ii55\dots5} + a_{i55\dots5} + \dots) . \end{aligned}$$

A P P E N D I C E A

H O M O T O P I E D E $\mathcal{C}^n$ - L O U L E S T

A L G E B R I Q U E F E R M E

(SOLUTION PARTIELLE DU PROBLEME N° 3)

I - DECOMPOSITION DE L

Soit T un Espace Affine Complexe . Nous prendrons $T = \mathbb{C}^n$.

Soit $L \subset T$ un sous-ensemble algébrique fermé.

La décomposition canonique de L en composantes irréductibles sera

notée $L = \bigcup_{\beta, d} L_{\beta, d}$,

où $L_{\beta, d}$ est soit vide,

{ soit irréductible et de codimension d

donc $\beta \in \{1, 2, \dots\}$

$d \in \{0, 1, 2 \dots n\}$

et $d = d(\beta) = \text{codim}_{\mathbb{C}} (L_{\beta, d} \subset \mathbb{C}^n)$

II - HOMOTOPIE LOCALE EN $y \in L$ DE $T - L$: $\pi_1(N(y) - L, t_0)$

Définition 1

Soit $y \in L$ un point de L et soit $N_r(y) \subset T$ la boule de T de centre y et de rayon r (pour la distance euclidienne du $\mathbb{R}^{2n}$ sous-jacent à T).

On appelle groupe d'HOMOTOPIE LOCALE de $T - L$ en $y \in L$, la limite projective, lorsque r tend vers zéro, du premier groupe d'homotopie du complément de L dans $N_r(y)$.

Plus précisément :

Si $0 < r \leq s$, alors un lacet dans $(N_r(y) - L)$ est aussi un lacet dans $(N_s(y) - L)$, ce qui donne un homomorphisme naturel

$P_{sr} : \pi_1(N_r(y) - L) \dashrightarrow \pi_1(N_s(y) - L)$ des groupes d'homotopie; et nous prenons la limite projective, $\varprojlim \pi_1(N(y) - L)$, de la famille des P_{sr} .

De plus ici L est algébrique fermée, donc il existe un rayon r_1 au dessous duquel les P_{sr} sont tous des isomorphismes: donc d'une part nous pourrions prendre la limite projective de l'homotopie avec point base $t_0 \in N_{r_1}(y) = N(y)$ et d'autre part une limite projective est $\boxed{\pi_1(N(y) - L ; t_0)}$.

Proposition 1

Si $L = (L_{\beta,d})$ est la décomposition canonique de L ;

Si la famille $\{L_{\beta,d}\}$ est en Position Générale en $y \in L$; alors le groupe d'homotopie locale $\pi_1(N(y) - L ; b)$ est un groupe abélien libre ayant autant d'éléments de base qu'il y a de $L_{\beta,d}$ tels que $d(\beta) = 1$ et $y \in L_{\beta,1}$.

Corollaire :

Si la famille $\{L_{\beta,1}\}$ est en Position Générale en $y \in L$ alors le groupe d'homotopie locale de $L : \pi_1(N(y) - L ; b)$ est un groupe abélien libre comportant un générateur par $L_{\beta,1}$ passant par y . [La preuve du corollaire est la même qu'une partie de la preuve du théorème 1 qui suit].

Preuve

On utilisera deux lemmes supposés connus*.

*Cf. Hilton introduction to Homotopy theory.

Lemme 1 :

L'homotopie d'un produit est la somme de celles des facteurs.

$$\pi_n(X.Y) = \pi_n(X) + \pi_n(Y) \quad]]$$

Lemme 2

Soit S^n la sphère réelle de dimension réelle n , alors

$$\begin{aligned} \pi_1(S^n) &= \pi_2(S^n) = \dots = \pi_{n-1}(S^n) = 0 \\ \pi_q(S^1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 1 \\ \mathbb{Z} & \text{si } q = 1 \text{ (groupe cyclique infini)} \end{cases} \quad]] \end{aligned}$$

Preuve de la proposition

L'hypothèse de position générale en $y \in L$ permet de choisir un système de coordonnées locales d'origine y tel que

$$L_{\beta_1,1} \quad \text{soit} \quad x_1 = 0$$

$$L_{\beta_2,1} \quad \text{soit} \quad x_2 = 0$$

$$L_{\beta_p,1} \quad \text{soit} \quad x_p = 0$$

$$L_{\beta_{p+1},2} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x_{p+1} = 0 \\ x_{p+2} = 0 \end{cases}$$

etc.....

D'où l'homéomorphisme

$$(N(y) \cdot L) \simeq \mathcal{C}_0^{d(\beta_1)} \times \mathcal{C}_0^{d(\beta_2)} \dots \mathcal{C}_0^{d(\beta_q)} \times \mathcal{C}_0^{\dim T - \sum_1^q d(\beta_j)}$$

où $\mathcal{C}_0^{d(\beta)} = \mathcal{C}^{d(\beta)} - \{0\}$ est l'espace numérique épointé et admet une rétraction par déformation sur la sphère $S^{2d(\beta)-1}$.

Donc, d'après le lemme 2 on a : $\pi_1(\mathcal{C}_o^{d(\beta_1)}) = \begin{cases} 0, & \text{si } d \neq 1 \\ \mathbb{Z}, & \text{si } d = 1 \end{cases}$
 et, d'après le lemme 1, on a

$$\pi_1(N(y) - L ; b) = \sum_j \pi_1(\mathcal{C}_o^{d(\beta_j)}) + 0 \quad \quad \quad]]$$

III - DESCRIPTION DE L'HOMOTOPIE GLOBALE DE $T - L$

Soit toujours $L = \bigcup L_{\beta,d}$, $d = d(\beta) = \text{codim}_{\mathcal{C}}(L_{\beta,d} \subset T)$ la décomposition unique de L en composantes irréductibles.

Théorème 1

- (i) $\pi_1(T - L ; t_1) = \pi_1(T - \bigcup_{\beta} L_{\beta,1} ; t_1)$
 (ii) De plus, si $\dim T > 1$ et si la famille $\{L_{\beta,1}\}$ est en position générale à distance finie ou infinie, alors $\pi_1(T - L ; t_1)$ est abélien.

Démonstration de (i)

La démonstration qui exhibera un ensemble $(\bigcup_{\beta} \mathcal{L}_{\beta})$ (surabondant) de générateurs de $\pi_1(T - L ; t_1)$, procède en six étapes :

Première étape

$T - L$ est connexe (ou vide) ; en effet $T = \mathcal{C}^n$ l'est et L est algébrique et fermé.

Deuxième étape : OMBRES ET COUPURES

Nous cherchons une coupure $\overset{v}{L}$ engendrée par L et telle que :

- (a) $T - \overset{v}{L}$ soit connexe
 (b) $\pi_1(T - \overset{v}{L} ; t) = 1$ i.e. $(T - \overset{v}{L})$ est simplement connexe
 (c) $\pi_1(T - L \cup \overset{v}{L} ; t) = 1$ i.e. $T - (L \cup \overset{v}{L})$ est simplement connexe
 (d) $T - \overset{v}{L}$ est maximal par rapport aux conditions (a), (b) et (c)

Un tel L n'est pas unique; la METHODE DES OMBRES en fournira un :
 Soit $t_1 \in T - L$ un point de T non situé dans L et choisis une fois pour toutes.

Soit $L^w = \{t \in T = \mathbb{C}^n \mid \exists \lambda \geq 1 \text{ tels que } t = t_1 + \lambda(y - t_1)\}$
 $\lambda \text{ réel}$
L'OMBRE faite dans T par L éclairé par t_1 .

Alors $L \subset L^w$ et l'espace $T - L^w$ est un ouvert étoilé de T et, comme tel, est homotopiquement trivial et satisfait donc les conditions (a), (b) et (c) ci-dessus.

Remarque : $L \subset T = \mathbb{C}^n$ étant un ensemble algébrique et fermé, il en est de même de son intersection avec la droite complexe* définie par les deux points t_1 et z où $t_1 \in T - L$ et $z \in L$.

Donc cette droite complexe* ne rencontre L qu'en un nombre fini de points (puisque t_1 lui appartient et $t_1 \notin L$).

Donc la droite réelle** $\overrightarrow{t_1 z}$ ne rencontre donc généralement L qu'au seul point z .

Troisième étape : Apparition du LACET ELEMENTAIRE

Définition 2

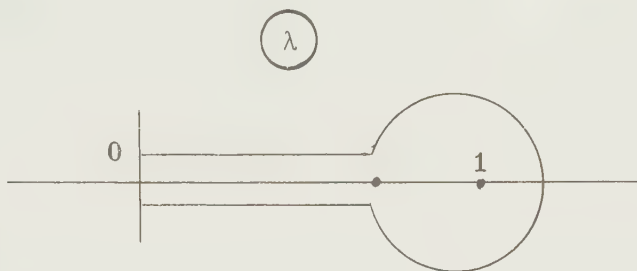
On appelle Lacet Elémentaire $d(y)$ d'un point $y \in T$, le chemin dans T



* $\{t \in T \mid t = t_1 + \lambda(z - t_1) ; \lambda \in \mathbb{C}\}$

** $\overrightarrow{t_1 z} = \{t \in T \mid t = t_1 + \lambda(z - t_1) ; \lambda \in \mathbb{R}\}$

image par l'application $\lambda \mapsto t = t_1 + \lambda(y - t_1)$ du lacet élémentaire du plan complexe (dont le diamètre de la boule autour de 1 est assez petit)



Lemme 3

Soit $y \in L$ un point de L tel que le segment ouvert $[t_1, y[\subset T - L$ soit dans $T - L$.

Soit $\bar{\alpha}(y)$ une modification locale * quelconque de $\alpha(y)$ près de y telle que $\bar{\alpha}(y) \subset T - L$.

Alors les classes d'homotopie des $\bar{\alpha}(y)$ dans $(T - L ; t_1)$ forment un sous-groupe de $\pi_1(T - L ; t_1)$.

Preuve

En effet ces classes forment l'image de $\pi_1(N(y) - L ; b)$ par le morphisme de groupe que définit l'inclusion $(N(y) - L) \subset (T - L)$ suivi de l'isomorphisme de groupes correspondant au changement de point base suivant le chemin $[t_1, b]$:

$$\pi_1(N(y) - L ; b) \rightarrow \pi_1(T - L ; b) \rightarrow \pi_1(T - L ; t_1) \quad]]$$

*une modification locale près de y est une modification qui n'affecte que la partie située dans la boule $N(y) = N_{r_1}(y)$ de la définition du paragraphe II..

Corollaire 1

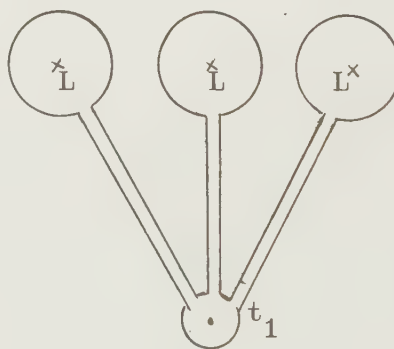
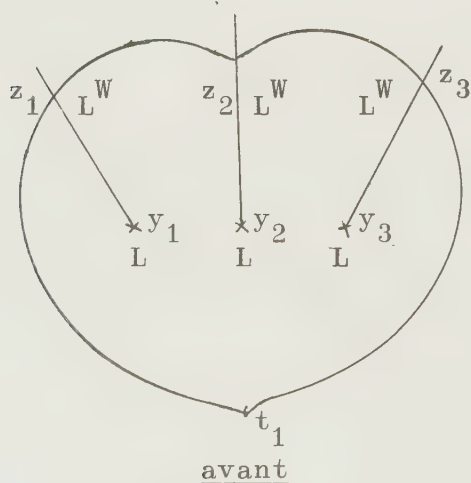
Si de plus les $\{L_{\beta,d}\}$ sont en position générale en y alors cette image est abélienne et comporte au plus autant de générateurs que $\pi_1(N(y) - L ; b)$; c'est-à-dire un générateur par $L_{\beta,1}$ tel que $y \in L_{\beta,1}$]]

Corollaire 2

Si de plus $y \in L$ est un point régulier de L (et donc appartient à une seule $L_{\beta,d}$ et est régulier)

- si $1 < d = d(\beta) = \text{codim}_{\mathbb{C}}(L_{\beta,d} \subset T)$, alors $\alpha(y)$ a une image triviale dans $\pi_1(T - L ; t_1)$
- si $1 = d = d(\beta)$; alors l'image admet au plus un générateur.

Preuve cf. proposition 1]].

Quatrième étape : Décomposition en produit de lacets élémentaires

Soit σ un lacet quelconque (différentiable par morceaux) de

$$\pi_1(T - L ; t_1)$$

$$\text{Soit } \overset{w}{\sigma} = \sigma \cap L,$$

Alors $\sigma - \overset{w}{\sigma}$ est dans l'ouvert étoilé $T - \overset{w}{L}$ de $T - L$ donc se contracte sur t_1 dans $T - \overset{w}{L}$ (puisque $L \subset \overset{w}{L}$).

- On peut prendre σ dans sa classe de sorte que $\overset{w}{\sigma}$ ne comporte qu'un nombre fini de points (algébricité de L ; compacité de σ) . Soient $z_1, z_2, \dots, z_v$ ces points comptés dans l'ordre où ils se trouvent sur σ .

Soient $y_1, y_2, \dots, y_v$ les points de L situés sur les segments $[t_1, z_1], [t_1, z_2], \dots, [t_1, z_v]$;

- on peut supposer qu'il y en a un seul par segment.

- On peut prendre σ dans sa classe de sorte que $y_1, y_2, \dots, y_v$ soient des points réguliers de L .

- Il est maintenant clair, en modifiant la rétraction de $\sigma - \overset{w}{\sigma}$ dans un voisinage de chaque segment $[t_1, z_j]$ et $[t_1, y_j]$, que σ a la même classe d'homotopie dans $\pi_1(T - L ; t_1)$ que le produit de lacets élémentaires $\alpha(y_1) \times \alpha(y_2) \times \dots \times \alpha(y_v)$.

Cinquième étape : La réduction de $\overset{w}{L}$ à $\overset{v}{L}$.

Dans l'étape précédente les lacets $\alpha(y_j)$ tels que $y_j \in L_{\beta, d}$, $d > 1$ ont une image triviale dans $\pi_1(T - L ; t_1)$ (cf. lemme 3, cor. 2) et seuls les lacets élémentaires des $L_{\beta, 1}$ jouent un rôle.

On peut donc omettre, dans la méthode des ombres, les parties régulières de $L_{\beta, d}$ où $d > 1$. Mais alors il nous reste

a) Les intersections $L_{\beta, d} \cap L_{\beta, d'}$, où $d > 1$, $d' > 1$

auxquelles on peut appliquer le même procédé puisqu'elles sont fermées et algébriques.

- b) Les parties non régulières des $L_{\beta,d}$, où $d > 1$ qui ont elles mêmes une partie régulière, et ainsi, en un nombre fini d'étapes, chaque $L_{\beta,d}$ où $d = d(\beta) > 1$ se trouve complètement éliminé (sauf en ce qui concerne son intersection avec les $\{L_{\beta,1}\}$).

Conclusion

Comme coupure de $(T - L)$, ne conserver dans L^w que l'ombre L^v de $\cup L_{\beta,1}$, faite dans T par les seules composantes irréductibles de codimension un de L .

Alors $T - \bar{L}$ satisfait les conditions (a), (b), (c), (d) de la deuxième étape.

De plus tout lacet σ de $\pi_1(T - L; t_1)$ s'écrit comme un produit de lacets élémentaires

$$\sigma = \alpha(y_1) \cdot \alpha(y_2) \cdot \dots \cdot \alpha(y_v) \quad \text{avec} \quad y_j \in L_{\beta_j,1}.$$

Sixième étape : Un ensemble de générateurs $\cup \mathcal{L}_{\beta}(t_1)$ pour $\pi_1(\underline{T-L}, t_1)$.

Soit $y \in L_{\beta,1}$ un point régulier de cette composante et

Soit $\Lambda = \{t \in L \mid \{L_{\beta,1}\} \text{ n'est pas en P.G en } t\}$

Définition

$$\text{Soit } \mathcal{L}_{\beta}(t_0) = \{L_{\beta,1}^1, L_{\beta,1}^2, L_{\beta,1}^3, \dots\}$$

l'ensemble des composantes connexes par arc de la partie régulière *
de $L_{\beta,1} - (L - \delta L)$.

Alors, si y et z appartiennent tous deux au même $L_{\beta,1}^j$, leurs
lacets élémentaires $\alpha(y)$ et $\alpha(z)$ appartiennent à une même classe
d'homotopie. Et si y et z sont voisins sur $L_{\beta,1}$ mais n'appar-
tiennent pas à un même $L_{\beta,1}^j$ (tout en n'étant pas séparés sur $L_{\beta,1}$
par Λ), leurs lacets élémentaires diffèrent alors par l'action d'un
point u d'un autre $L_{\beta,1}$:

$$\alpha(y) = \alpha(u) \alpha(z) \alpha(u)^{-1}$$

comme le montre immédiatement l'étape quatre.

On a donc un ensemble de générateurs avec relations de $\pi_1(T - L ; t_1)$
formé d'un lacet élémentaire par élément de $\cup \mathcal{L}_{\beta}(t_1)$.]]

Remarque : Bien que $\pi_1(T - (L \cup L) = 1$, les points de $L - L$
(i.e. $L - (L \cap L)$) sont considérés comme "interdits".

Démonstration de (ii)

Puisque $T = \mathbb{C}^n$, soit $\bar{T} = \bar{P}^n = T \cup \bar{P}_{\infty}^{n-1}$ la compactification
canonique de T en le n -plan projectif complexe.

Soit $\bar{L}_{\beta,1} \subset \bar{T}$ la fermeture de $L_{\beta,1}$ dans ce $\bar{P}^n$. C'est une
hypersurface algébrique irréductible.

* pour les besoins de la cause on convient de ne pas considérer comme
réguliers les points du bord d'une variété à bords.

| De sorte que, si $n > 1$, la réunion $\bigcup_{\beta} \bar{L}_{\beta,1}$ est connexe.

L'hypothèse (ii) du théorème s'écrit plus explicitement :

"Les $\bar{L}_{\beta,1}$ forment avec $\bar{P}_{\infty}^{n-1}$ une famille d'hypersurfaces en position générale de $\bar{P}^n$."

Cette hypothèse entraîne notamment que la réunion $\bigcup_{\beta} L_{\beta,1}$ est connexe ;

En effet, si l'intersection $L_{\beta,1} \cap L_{\gamma,1}$ est vide, c'est que l'on a l'égalité $\bar{L}_{\beta,1} \cap \bar{L}_{\gamma,1} = \bar{L}_{\beta,1} \cap \bar{L}_{\gamma,1} \cap \bar{P}_{\infty}^{n-1}$. Or le premier membre serait de codimension deux dans $\bar{P}^n$ tandis que le deuxième membre serait de codimension trois, ce qui est contradictoire.

Mais alors la commutativité locale fournie par le corollaire 1 du lemme 3, entraîne avec l'étape six précédente et avec la présente connexité, la commutativité dans $T - L$ de deux lacets élémentaires quelconques ; ce qui avec l'étape quatre, prouve la partie (ii).]]

- - - - -

A P P E N D I C E B

D U A L I T E P A R I N T E R S E C T I O N , P O N C T U E L L E

R E S I D U S D E J . L E R A Y

Cet appendice est consacré à quelques rappels ^{*} concernant la théorie des Résidus de J. Leray.

Définition

Une famille ϕ de supports dans un espace topologique paracompact X est :

S_0 : une famille ϕ d'ensembles fermés de X tels que

S_1 : $A \in \phi$ et $B \in \phi \Rightarrow A \cap B \in \phi$

S_2 : $A \in \phi$, $A' \subset A$ } $\Rightarrow A' \in \phi$
 : A' fermé dans A

S_3 : $A \in \phi \Rightarrow \exists N(A)$, voisinage de A , tel que $N(A) \in \phi$.

Exemples de familles de supports.

$\phi = F(X)$, famille dans X de tous les fermés de X

$\phi = F(\underline{X} - S)$, famille dans X des fermés de X qui ne rencontrent pas S , encore appelée famille des fermés de $(X - S)$, fermés aussi dans X .

$\phi = c$, famille des compacts de X . (si X est localement compact).

Homologie, Cohomologie et familles de supports

A toute famille ϕ de supports dans X , on fait correspondre une homologie $H_*^\phi(X)$ et une cohomologie $H^*_\phi(X)$ à support dans cette famille.

^{*}Pour plus de détails voir J. Leray.....

- (1) Si $\phi = F(\underline{X} - S)$ est la famille des fermés de $X - S$ fermés aussi dans X , on notera les homologie et cohomologie correspondantes respectivement par

$$\begin{array}{l} H_*^F(\underline{X} - S) \quad \text{au lieu de} \quad H_*^\phi(X) \\ \text{et} \quad H_F^*(\underline{X} - S) \quad \text{au lieu de} \quad H_\phi^*(X) . \end{array}$$

On ne confondra pas cette homologie et cette cohomologie avec celles de $X - S$ à support les fermés quelconques de $X - S$, et qui se notent respectivement

$$H_*^F(X - S) \quad \text{et} \quad H_F^*(X - S)$$

(où X n'est pas souligné).

Isomorphisme de Poincaré - Cartan.

Si X est une variété topologique orientée de dimension réelle r ,

Si ϕ est une famille de supports,

alors il existe un isomorphisme canonique entre l'homologie et la cohomologie de X en dimensions complémentaires :

c'est l'isomorphisme de Poincaré-Cartan :

(2)

$$\varphi : H_\phi^p(X) \simeq H_q^\phi(X) , \quad \text{où } p + q = r$$

cet isomorphisme a été utilisé au chapitre IV, et forme avec la suite exacte d'un fermé en cohomologie, la base de la théorie du cobord composé de J. Leray.

Dualité de De Rham - Leray

Si Ω est une variété différentiable orientée et de dimension réelle r .

Si $S' \neq S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_\mu$ est une réunion de sous-variétés différentiables orientées, fermées dans Ω , et EN POSITION GENERALE dans Ω .

Si on pose $S = S_\mu$ et $S'' = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{\mu-1}$, alors l'intégration est une dualité entre les triplets exacts, d'homologie relative compacte et de cohomologie relative fermée :

$$\begin{array}{ccc} H_F^*(\Omega, S \cup S'') & & \\ \downarrow & \swarrow & \\ H_F^*(\Omega, S'') & \xrightarrow{\quad} & H_F^*(S, S'') \end{array}$$

$$(3) \quad \text{Dualité par } (\omega, h) \longmapsto h \int_h \omega \in \mathcal{C}$$

$$\begin{array}{ccc} H_*^c(\Omega, S \cup S'') & & \\ \uparrow & \searrow & \\ H_*^c(\Omega, S'') & \longleftarrow & H_*^c(S, S'') \end{array}$$

Remarque : 1) Le triplet d'en bas n'est pas le triplet exact habituellement associé à $(\Omega \supset (S \cup S'') \supset S'')$ mais en diffère par un isomorphisme d'excision :

$H_*^c(S \cup S'', S'') \simeq H_*^c(S, S'')$ due ici à une propriété de rétraction de voisinage de $S \cap S''$.

2) J. Leray déduit cette dualité (par usage du lemme des cinq) de celle de De Rham, à laquelle elle revient lorsque S'' est vide.

Dualité par intersection ponctuelle.

La situation étant exactement la même que dans l'alinéa précédent, il existe une dualité dite par intersection ou par indice de Kronecker, entre l'homologie compacte de Ω relative à S' et l'homologie du complément de S' dans Ω à supports fermés dans Ω .

$$(4) \quad I : H_q^F(\underline{\Omega} - S') \otimes H_p^c(\Omega, S') \rightarrow \mathbb{C}$$

$$p + q = r$$

qui peut se définir si $\sigma \in H_q^F(\underline{\Omega} - S')$ et $h \in H_p^c(\Omega, S')$ par la formule :

$$(5) \quad I(\sigma, h) = \langle \sigma | h \rangle = \int_h (G \circ \varphi^{-1}) \sigma$$

où φ est l'isomorphisme de Poincaré-Cartan

$\int$ est la dualité de De Rham - Leray

G est l'isomorphisme de Godement en cohomologie

$$G : H_F^*(\underline{\Omega} - S') \xrightarrow{\sim} H_F^*(\Omega, S') .$$

(Valable lorsque S' est fermé et si les coefficients sont $\mathbb{Z}$

ou $\mathbb{C}$).

Formule des Résidus de J. Leray

La dualité par intégration de De Rham - Leray permet la transposition de certains morphismes, c'est ainsi que le transposé du cobord composé de J. Leray :

$$(6) \quad \delta^\beta : H_n^c(X - \beta S) \leftarrow H_{n-|\beta|}^c(\beta S)$$

a pour transposé, le résidu composé de J. Leray :

$$(7) \quad (2\pi i)^{|\beta|} \operatorname{res}^{\beta} : H_F^n(X - {}_{\beta}S) \longrightarrow H_{n-|\beta|}^c({}_{\beta}S)$$

Suivant la formule :

$$(8) \quad \boxed{\delta^{\beta}_h \int \omega = (2\pi i)_h^{|\beta|} \int \operatorname{res}^{\beta} \omega}$$

[On suppose toujours que ${}_{\beta}S = S_1 \cup \dots \cup S_{|\beta|}$ est une famille en position générale dans X et que

$${}^{\beta}S = S_1 \cap \dots \cap S_{|\beta|} \quad \text{---}$$

On note que le cycle d'intégration du membre de gauche est de dimension $|\beta|$ fois supérieur à celui du membre de droite.

A P P E N D I C E C

D E S C R I P T I O N D ' U N E M E T H O D E

D ' E T U D E D U P R O B L E M E N° 5

L E P R O B L E M E D E L A R E L E V A N C E

Une méthode pour la détermination d'une composante $B(b, \gamma_b, R)$ bonne pour $b \in R \subset T$ et $\gamma_b \in H_*^c(Z_b - S'_b, S_b - S'_b)$ d'un objet $\mathcal{E} = [\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \cup \mathfrak{s}' \subset Z \times T \rightarrow T]$ peut être l'épuration $\overset{v}{L}(\gamma_b)$ du cône d'ombre $\overset{v}{L}(b)$ de b , qui consiste à laisser tomber les parties de $\overset{v}{L}(b)$ non relevantes pour γ_b ; puis à prendre l'intersection par R et éventuellement à compléter. Explicitons-la :

Les hypothèses sur l'objet :

$$\mathcal{E} = [\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \cup \mathfrak{s}' \subset Z \times T \rightarrow T]$$

et le point source $b = t \in T$ du cycle γ_b sont que

- (1) | La composante d'isotopie de b pour $\mathcal{E}$ soit de la forme $T - L$
 | où $L \subset T$ est un sous ensemble algébrique fermé d'un espace
 | affine complexe T .

Autrement dit, on peut appliquer à $T \subset L$ le théorème 1 de l'appendice A et former l'ombre $\overset{v}{L}(b)$ de la partie $L,1$ de codimension 1 de L éclairée par b , et pour chaque composante irréductible $L_{\beta,1}$, considérer la décomposition en composantes connexes par arc de la partie régulière de $\overset{v}{L}_{\beta,1} - \overset{v}{L} - \delta L$, soit

$$\mathfrak{L}_{\beta}(b) = \{L_{\beta,1}^1, L_{\beta,1}^2, L_{\beta,1}^3, \dots\}$$

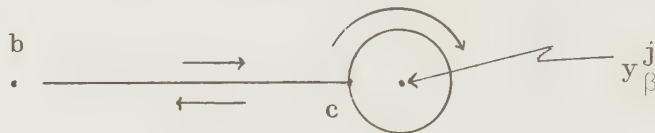
$$(\text{et son ombre par } b : \overset{v}{\mathfrak{L}}_{\beta}(b) = \{\overset{v}{L}_{\beta,1}^1, \overset{v}{L}_{\beta,1}^2, \overset{v}{L}_{\beta,1}^3\})$$

On procède alors à l'épuration du cône $\overset{v}{L}$ en ignorant certaines parties $\overset{v}{L}_{\beta,1}^j$ (d'irrelevance pour γ_b) :

Soit $y_\beta^j \in L_{\beta,1}^j$, un point quelconque de $L_{\beta,1}^j$.

Soit $\alpha(y_\beta^j)$ le lacet élémentaire correspondant. Alors si la variation de γ_b (pour ce lacet élémentaire) est nulle, on élimine $L_{\beta,1}^j$.

Notamment si le lacet élémentaire est



Soit, pour t restant sur la droite complexe du lacet et restant voisin de y_β^j , un ouvert $W_\beta^j \subset Z$ minimal parmi ceux qui satisfont dans ces conditions les hypothèses du lemme de localisation ; on éliminera $L_{\beta,1}^j$ de l'ombre s'il existe un isotopé (LE LONG DU SEGMENT $\vec{cb}$) W_β^j de W_β^j tel que γ_b ne rencontre pas W_β^j .

L'ombre épurée $L(\gamma_b)$ découpe alors sur R un système de coupures rendant l'intégrale associable à γ_b uniforme et sans singularité sur son complément.

- - - - -

A P P E N D I C E D

S P H E R E S C O M P L E X E S

PARTIE REELLE D'UNE VARIETE ANALYTIQUE COMPLEXE

SPHERE COMPLEXE AFFINE $\Sigma^n \subset \mathbb{C}^{n+1}$

C'est la sous variété algébrique non singulière Σ^n de codimension un de l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^{n+1}$ dont l'équation polynomiale est

$$\Sigma^n \quad z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1$$

$$\text{où} \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$$

Proposition 1

La sphère complexe Σ^n de dimension complexe n est difféomorphe au fibré tangent $\tau(S^n)$ à la sphère réelle S^n de dimension complexe n .

En effet, si $z_j = (x_j + iy_j) \in \mathbb{C} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$, alors les équations dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ de la variété différentiable réelle sous-jacente à Σ^n sont

$$\begin{aligned} \Sigma^n : \quad & x^2 - y^2 = 1 \quad (\text{ie } x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 - y_1^2 - \dots - y_{n+1}^2 = 1) \\ & \text{et} \\ & x \cdot y = 0 \quad (\text{ie } x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1} = 0) \end{aligned}$$

D'autre part, les équations du fibré tangent à S^n dans $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$ sont :

$$\tau(S^n) : \{(x', y') \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid x'^2 = 1 \text{ et } x' \cdot y' = 0\}$$

et un difféomorphisme : $\Sigma^n \rightarrow \tau(S^n)$ est défini par

$$(x, y) \mapsto (x' = x \sqrt{1 - \frac{y^2}{x^2}}, y' = y)$$

dont l'inverse $\Sigma^n \leftarrow \tau(S^n)$ est défini par

$$(x = x' \sqrt{1 + \frac{y'^2}{x'^2}}, y = y') \leftrightarrow (x', y') \quad]]$$

Représentation vectorielle

Il est commode de représenter un point $z = (x + iy) \in \mathbb{C}^p$ de l'espace numérique complexe $\mathbb{C}^p$, comme un vecteur de l'espace affine réel $\mathbb{R}^p$:

l'origine du vecteur étant : $x =$ partie réelle de $z \in \mathbb{R}^p$

le vecteur étant équipollent à : $y =$ partie imaginaire de $z \in \mathbb{R}^p$

SPHERE PROJECTIVE COMPLEXE $\bar{\Sigma}^n \subset \mathbb{P}^{n+1}$

Si $\bar{z} = (z_0, \dots, z_{n+1})$ sont les coordonnées homogènes de l'espace projectif complexe $\bar{\mathbb{P}}^{n+1}$, alors l'équation de la sphère projective complexe $\bar{\Sigma}^n$ est :

$$\bar{\Sigma}^n : z_0^2 + z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 0$$

La section d'une sphère projective complexe de dimension n par un hyperplan projectif complexe en position générale est une sphère projective complexe $\bar{\Sigma}^{n-1}$ de dimension $(n-1)$. Le complément de cette section est la sphère affine complexe Σ^n de dimension n .

$$\Sigma^n = \bar{\Sigma}^n - \bar{\Sigma}^{n-1}$$

HOMOLOGIES ET COHOMOLOGIES DIVERSES

DE LA SPHERE REELLE S^n

DE LA SPHERE COMPLEXE AFFINE Σ^n

DE LA SPHERE COMPLEXE PROJECTIVE $\bar{\Sigma}^n$

SPHERE REELLE

La sphère réelle S^n est compacte, son homologie compacte H_*^c coïncide donc avec son homologie fermée H_*^F ; de même sa cohomologie compacte H_c^* coïncide avec sa cohomologie fermée H_F^* .

En fait on a :

$$H_p^F(S^n) = H_p^c(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \neq 0 \text{ et } p \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } p = 0 \text{ ou } p = n \end{cases}$$

et

$$H_F^q(S^n) = H_c^q(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } q \neq 0 \text{ et } q \neq n \\ \mathbb{Z} & \text{si } q = 0 \text{ ou } q = n \end{cases}.$$

La caractéristique d'Euler-Poncaré de la sphère réelle S^n est donc

$$\chi(S^n) = \sum_p (-1)^p \dim H_p^c(S^n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair \\ 2 & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases}$$

SPHERE COMPLEXE AFFINE Σ^n

D'après la proposition 1, la sphère complexe affine Σ^n se rétracte par déformation sur la sphère réelle S^n . Leurs homologies compactes sont donc les mêmes et leurs cohomologies fermées sont donc les mêmes, ie

$$\text{Homologie } H_p^c(\Sigma^n) = H_p^c(S^n) \text{ pour tout } p$$

$$\text{Cohomologie } H_F^q(\Sigma^n) = H_F^q(S^n) \text{ pour tout } q$$

La dualité de Poincaré-Cartan permet alors le calcul de l'homologie fermée H_p^F et de la cohomologie compacte H_c^q

$$\text{Homologie } H_p^F(\Sigma^n) = H_F^{2n-p}(\Sigma^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } p = 2n \text{ ou } p = n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

$$\text{Cohomologie } H_c^q(\Sigma^n) = H_{2n-q}^c(\Sigma^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{pour } q = n \text{ ou } q = 2n \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Parité

Le générateur de l'homologie de Σ^n est essentiellement la sphère réelle de gorge S^n canoniquement orientée.

La self intersection de la sphère de gorge est :

- nulle pour les sphères complexes de dimension impaire
- différente de zéro pour celles de dimension paire.

En effet puisque $\chi(S^n)$ n'est nul que si n est impair, le fibré tangent $\tau(S^n)$ à la variété S^n n'admet de section non triviale que si n est impair, autrement dit la self intersection de la sphère

de gorge de Σ^n n'est nulle que si n est impair.

SPHERE COMPLEXE PROJECTIVE $\bar{\Sigma}^n$

- De la suite exacte d'un fermé pour la cohomologie, et de l'égalité $\Sigma^n = \bar{\Sigma}^n - \bar{\Sigma}^{n-1}$, on déduit les triangles exacts de cohomologie compacte :

$$\begin{array}{ccc} H_c^*(\bar{\Sigma}^n) & \longrightarrow & H_c^*(\bar{\Sigma}^{n-1}) \\ \uparrow & \swarrow \text{---} & \\ H_c^*(\Sigma^n) & & \end{array}$$

que l'on symbolisera en :

$$\begin{array}{ccc} \bar{\Sigma}^n & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^{n-1} \\ \uparrow & \swarrow \text{---} & \\ \Sigma^n & & \end{array}$$

où la flèche barrée est le cobord qui augmente le degré d'une unité.

- De plus, comme $\bar{\Sigma}^n$ est une variété compacte, de dimension réelle $2n$, on a, si les coefficients sont dans un corps,

$$H_c^p(\bar{\Sigma}^n) = H_c^{2n-p}(\bar{\Sigma}^n).$$

- Notons $(0^\alpha, 1^\beta, \dots, q^\epsilon, \dots)$ un groupe libre gradué ayant
 α générateurs de base en dimension zero
 β générateurs de base en dimension un
 ϵ générateurs de base en dimension q

- Tenons compte du fait que $H_c^*(\Sigma^n) = (n, 2n)$ et du fait que $\bar{\Sigma}^0 = \Sigma^0 =$ deux points.

Alors la suite de triangles exacts :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bar{\Sigma}^{2p} & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^{2p-1} & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^{2p-2} & \dots & \bar{\Sigma}^3 & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^2 & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^1 & \longrightarrow & \Sigma^0 \\
 \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & & & \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & \\
 \Sigma^{2p} & & \Sigma^{2p-1} & & & & \Sigma^3 & & \Sigma^2 & & \Sigma^1 & &
 \end{array}$$

permet le calcul par récurrence de $H_c^*(\bar{\Sigma}^n)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 (2p) \oplus (0, 2, \dots, 4p) & \rightarrow & (0, 2, 4, \dots, 4p-2) & \dots & (0, 2, 4, 6) & \rightarrow & (0, 2^2, 4) & \rightarrow & (0, 2) & \rightarrow & 0^2 \\
 \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & & \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times & \uparrow & \swarrow \times \\
 (2p, 4p) & & (2p-1, 4p-2) & & (3, 6) & & (2, 4) & & (1, 2) & & &
 \end{array}$$

En conclusion :

$$H_c^*(\bar{\Sigma}^{2p-1}) = (0, 2, 4, \dots, 4p-2)$$

et

$$\begin{aligned}
 H_c^*(\bar{\Sigma}^{2p}) &= (2p) \oplus (0, 2, 4, \dots, 4p) \\
 &= (0, 2, \dots, 2p-2, (2p)^2, 2p+2, \dots, 4p)
 \end{aligned}$$

Remarque : L'inclusion fermée canonique $\bar{\Sigma}^q \hookrightarrow \bar{P}^{q+1}$ donne les triangles exacts de cohomologie compacte :

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{P}^{q+1} & \longrightarrow & \bar{\Sigma}^q \\
 \uparrow & \swarrow \times & \\
 \bar{P}^{q+1} & \xrightarrow{\quad} & \bar{\Sigma}^q
 \end{array}$$

et, de ce qui précède et du fait que

$$H_c^*(\bar{P}^q) = (0, 2, \dots, 2q) ,$$

on déduit facilement,

$$H_c^*(\bar{P}^{2p} - \bar{\Sigma}^{2p-1}) = (4p)$$

$$H_c^*(\bar{P}^{2p+1} - \bar{\Sigma}^{2p}) = (2p+1, 4p+2)$$

d'où, pour l'homologie :

$$H_*^c(\bar{P}^{2p} - \bar{\Sigma}^{2p-1}) = (0)$$

et

$$H_*^c(\bar{P}^{2p+1} - \bar{\Sigma}^{2p}) = (0, 2p+1)$$

ANTIPODIE ET ISOTOPIE

Proposition (Y. Fary)

La transformation antipodaire $z \mapsto -z$ de la sphère complexe affine Σ^n sur elle-même, est isotope à un difféomorphisme qui est l'identité hors d'un compact et qui est la transformation antipodaire au voisinage de la sphère réelle de gorge.

Preuve

Pour $n = 0$ ie pour $\Sigma^0 = S^0$ c'est évident

Pour $n = 1$ ie pour Σ^1

si $(x, y) \in \Sigma^1 \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, l'isotopie est $(x, y) \mapsto (x e^{i\theta_t(|y|)}, y e^{i\theta_t(|y|)})$, où $\theta_t : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ , monotone constamment

égale à π quand l'argument est inférieur à $\eta_0 \geq 0$,

et constamment égale à $(1-t)\pi$ quand l'argument est supérieur à $\eta_1 > \eta_0$.

Pour n quelconque,

on vérifie qu'il existe bien une telle isotopie qui induise l'isotopie précédemment décrite sur la sous sphère complexe canonique **de dimension 1** $\Sigma^1_{(x,y)} \subset \Sigma^n$ passant par l'origine et par le point $(x,y) \in \Sigma^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ lorsque ce point varie dans Σ^n et que $y \neq 0$.]]

- - - - -

VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE MUNIE D'UNE PARTIE RÉELLE

Définition

Dans l'espace numérique $\mathbb{C}^n$, considéré comme complexité de l'espace numérique $\mathbb{R}^n$, on a les notions de partie réelle canonique et de l'imaginaire conjugué $\bar{z}$ d'un point z .

A toute application $f : \Omega^n \rightarrow \mathbb{C}^r$, dans $\mathbb{C}^r$ d'une partie de $\mathbb{C}^n$, on associe l'application (conjuguée) $\bar{f} : \bar{\Omega}^n \rightarrow \mathbb{C}^r$ dans $\mathbb{C}^r$ de la partie conjuguée de Ω^n définie par $\bar{f}(\bar{z}) = \overline{f(z)}$

- (1) On dit qu'une telle application f est réelle si f et $\bar{f}$ sont égales
- (2) On dit qu'une variété analytique complexe $X(\mathbb{C})$ de dimension n est munie d'une partie réelle, si l'on en a choisi un atlas analytique $(\underline{W}, \varphi)$ $\varphi_i : W_i \rightarrow \Omega^n \subset \mathbb{C}^n$, dont les applications de recollement $\varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ sont réelles au sens précédent.
- (3) La partie réelle $X(\mathbb{R})$ d'une telle variété est alors définie comme réunion des images réciproques des parties réelles canoniques $\mathbb{R}^n$ des cartes de cet atlas :

$$X(\mathbb{R}) = \bigcup_j \varphi_j^{-1}(\mathbb{R}^n) .$$

Cette partie réelle est donc soit vide, soit une variété réelle analytique et de dimension n ;

Remarque

- a) Deux variétés complexes différentes peuvent admettre la "même" partie réelle, c'est le cas de la sphère complexe affine Σ^n

comparée à la projective $\bar{\Sigma}^n$.

- b) Une même variété analytique complexe peut être munie de parties réelles de deux façons **non** isomorphes :

c'est ainsi que sur la sphère complexe Σ^n

$$\Sigma^n \quad z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1$$

On peut considérer que les points de l'hyperboloïde défini par

$$\{z \in \Sigma^n, \quad z = (ix_1, x_2, \dots, x_{n+1}), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^n\},$$

forment une partie réelle de Σ^n .

- c) Tout choix d'une partie réelle $X(\mathbb{R})$ d'une variété analytique complexe $X(\mathbb{C})$, détermine une involution $I : X(\mathbb{C}) \rightarrow X(\mathbb{C})$, ($I^2 = \mathbf{1}$) qui est un antimorphisme analytique (en un sens à définir), dont les points fixes constituent $X(\mathbb{R})$.

Et réciproquement.

A P P E N D I C E E

R E S U L T A T S D ' H I R O N A K A

E X I S T E N C E D ' U N E D E S I N G U L A R I S A T I O N

Dans ce qui suit, nous employons l'expression application analytique au lieu de morphisme algébrique régulier.

I - LE THEOREME 1 D'HIRONAKA*

Le problème suivant admet une solution $(\tilde{Y}, f)$.

Soit Y un ensemble algébrique irréductible (à singularités).

Soit $Z \subset Y$, $Z \neq Y$ un sous ensemble algébrique de Y (à singularités).

Soit $D \subset Y$ le sous-ensemble algébrique formé par les points non réguliers de Y .

Alors il existe :

une variété algébrique non singulière $\tilde{Y}$ et une application analytique propre $\tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$, telles que : si l'on pose $\tilde{Z} = \bar{f}^{-1}(Z)$ et $\tilde{D} = \bar{f}^{-1}(D)$, alors $\tilde{Z} \cup \tilde{D}$ est une union de sous variétés algébriques non singulières de $\tilde{Y}$ qui sont de codimension un et sont en position générale ;

De plus, la restriction $f|_{\tilde{Y} - (\tilde{Z} \cup \tilde{D})} : \tilde{Y} - (\tilde{Z} \cup \tilde{D}) \rightarrow Y - (Z \cup D)$ est un biholomorphisme de variétés algébriques non singulières.]]

Définition 1

Une telle application analytique f , c'est-à-dire un tel couple $(\tilde{Y}, \tilde{Z} \cup \tilde{D})$, s'appelle une désingularisation du couple (Y, Z) .

*Cf. Hironaka, Annals of Mathematics, January and March 1964.

Remarques :

- (1) On ne prétend pas à l'unicité de $(\tilde{Y}, \tilde{Z} \cup \tilde{D})$ même à biholomorphisme près.
- (2) $\tilde{Y}$ a même dimension que Y .
- (3) Si $\tilde{Y}$ est compacte, alors Y aussi est compacte.

Simplification dans notre cas : D sera vide, ie Y sera une variété algébrique sans singularité.

II - ECLATEMENT

Puisque dans notre cas Y est une variété algébrique non singulière, nous n'exposerons le problème de l'éclatement que dans une version simplifiée :

Théorème (A. Grothendieck) :

Le problème universel suivant admet une solution appelée ECLATEMENT de Y centré en M :

Soit $Y \supset M$ un couple formé d'une variété algébrique irréductible non singulière Y et d'une sous-variété algébrique non singulière fermée

$M \neq Y$, alors il existe une application analytique :

$\tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$ de but Y et de source une variété algébrique non singulière $\tilde{Y}$ et telle que :

- (i) $\tilde{f}^1(M) = \tilde{M}$ est une sous variété algébrique non singulière de $\tilde{Y}$ et de codimension un ;
- (ii) toute application analytique $Y' \xrightarrow{g} Y$ ayant la propriété (i), se factorise uniquement au travers de f ; (ie il existe une et une seule application analytique $Y' \xrightarrow{g'} \tilde{Y}$ telle que g soit la composée $Y' \xrightarrow{g'} \tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$).

Il est bien connu que si un tel couple $(\tilde{Y}, f)$ existe, alors il est unique à un biholomorphisme près.

L'éclatement $\tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$ de Y centré en M a en plus la propriété que :

- (iii) la restriction $f : (\tilde{Y} - \tilde{M}) \rightarrow Y - M$ est un biholomorphisme de variétés non singulières.
- (iv) f est une application propre.

Il existe des règles explicites pour la description de $(\tilde{Y}, f)$.

Notation

Si $\tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$ est un éclatement de Y centré en M ,

si $H \subset Y$ est un sous ensemble fermé, on pose :

$$\mathbb{Z} \left| \begin{array}{l} \tilde{H} = \tilde{f}^1(H) \subset \tilde{Y} \\ \bar{H} = \text{la fermeture dans } \tilde{Y} \text{ de } \tilde{f}^1(H - M) \subset \tilde{Y} . \end{array} \right.$$

Si $H \subset Y$ est un ensemble algébrique, alors $\tilde{H}$ et $\bar{H}$ sont des sous ensembles algébriques de $\tilde{Y}$ et $\bar{H} \subset \tilde{H} \subset \tilde{Y}$.

II.1 EXEMPLES TRES SIMPLES D'ECLATEMENTS

1°/ Eclatement f de $\mathbb{C}^n$ centré à l'origine $n \geq 1$

Si $n = 1$, f est l'application identique.

Si $n \geq 2$, l'éclatement de $(\mathbb{C}^n, \{0\})$ centré en $\{0\}$ se construit comme suit :

Soit $x \mapsto \hat{x}$, l'application canonique $(\mathbb{C}^n - \{0\}) \rightarrow \bar{\mathbb{P}}^{n-1}$ définissant le $(n-1)$ -plan projectif complexe à partir de ses coordonnées homogènes.

Soit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \times \bar{\mathbb{P}}^{n-1}$, la première projection du produit de l'espace n -affine par l'espace $(n-1)$ -projectif.

Soit dans ce produit l'ensemble N défini par :

$$N = \{(x, y) \in (\mathbb{C}^n - \{0\}) \times \bar{\mathbb{P}}^{n-1} \mid \hat{x} = y\}$$

alors l'éclatement cherché $\tilde{\mathbb{C}}^n$ est la fermeture $\bar{N}$ de N dans ce produit, et f est la restriction $f|_{\bar{N}}$ à $\bar{N}$ de la projection p :

$$(\tilde{\mathbb{C}}^n, f) = (\bar{N}, f|_{\bar{N}})$$

Géométriquement, cet éclatement a été obtenu en associant à chaque point de $\mathbb{C}^n - \{0\}$, la direction de la droite complexe qui le joint à l'origine, tandis qu'on associe à $\{0\}$ la direction de toutes les droites de $\mathbb{C}^n$ qui passent par ce point.

2°/ L'éclatement de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ centré en $\mathbb{C}^t$

C'est $\bar{N} \times \mathbb{C}^p \xrightarrow{f \times \text{id}} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^p$ où f et $\bar{N}$ viennent d'être définis en 1.

II.2 TRANSFORMATION, PAR UN ECLATEMENT $(\tilde{Z}, f)$ DE Z ,
D'UNE FAMILLE IRREDUCTIBLE $S(t)$ DE SOUS-ENSEMBLES ALGEBRIQUES
DE Z DEPENDANT ALGEBRIQUEMENT DE t .

Rappel de la notion de FAMILLE (IRREDUCTIBLE) ALGEBRIQUE

Définition

- On dit qu'une famille $(S(t))_{t \in T}$ de sous-ensembles algébriques fermés de Z est irréductible et dépend algébriquement du paramètre $t \in T$:

1°/ si pour tout $t \in T$, $S(t)$ est non vide

(ie si c'est bien une famille sur T)

2°/ si T est un ensemble algébrique (et irréductible pour simplifier)

3°/ si la réunion $\mathfrak{s} = \left(\bigcup_{t \in T} (S(t), t) \right) \subset Z \times T$ est un sous ensemble algébrique fermé du produit $Z \times T$.

4°/ si $\mathfrak{s}$ est un ensemble algébrique irréductible

Remarque : Ceci n'implique pas que $S(t)$ soit irréductible pour tout $t \in T$.

- On dit encore qu'un tel $\mathfrak{s} \subset Z \times T$ est UNE FAMILLE ALGEBRIQUE IRREDUCTIBLE DANS Z SUR T .

Soit maintenant $\mathfrak{s}_m = \mathfrak{s}_1 \cup \dots \cup \mathfrak{s}_m \subset Z \times T$ la décomposition

en ensembles irréductibles d'un sous-ensemble algébrique fermé de $Z \times T$, alors on dit que $\mathfrak{s} \subset Z \times T$ est une FAMILLE ALGEBRIQUE DANS Z SUR T si et seulement si chaque $\mathfrak{s}_i$ est au sens précédent une famille algébrique irréductible dans Z sur T .

Remarque : à tout sous-ensemble algébrique fermé $\mathfrak{s}' \subset Z \times T$ correspond une famille algébrique irréductible dans Z sur T .
[Ne garder dans la décomposition irréductible de $\mathfrak{s}'$ que les seules composantes satisfaisant la condition 1°/].

Proposition

Soit $f : \tilde{Z} \rightarrow Z$ un éclatement de Z de centre M ,
alors $g = f \times \text{Id}_T : \tilde{Z} \times T \rightarrow Z \times T$ est un éclatement de $Z \times T$,
Soit $\mathfrak{s} \subset Z \times T$ une famille algébrique irréductible dans Z sur T , alors $\bar{\mathfrak{s}} = \text{fermeture dans } \tilde{Z} \times T \text{ de } g^{-1}(\mathfrak{s} - M \times T) \subset \tilde{Z} \times T$ est une famille algébrique irréductible dans $\tilde{Z}$ sur T .

Définition

$\bar{\mathfrak{s}} \subset \tilde{Z} \times T$ est la famille algébrique irréductible dans $\tilde{Z}$ sur T , transformée par l'éclatement $f : \tilde{Z} \rightarrow Z$ de centre M , de la famille algébrique irréductible $\mathfrak{s} \subset Z \times T$ dans Z sur T .

Notation

La famille $\mathfrak{s}$ se note encore $S(t)$ d'équation locale $s(t)$,
la transformée $\bar{\mathfrak{s}}$ se note encore $\bar{S}(t)$ d'équation locale $\bar{s}(t)$.

Remarque importante : on se gardera de confondre $\bar{S}(t)$ ainsi défini avec l'un quelconque des deux autres ensembles suivants :

$$\overline{S(t)} = \overline{f^{-1}(S(t) \setminus M)} \subset \tilde{Z}$$

$$\widetilde{S(t)} = f^{-1}(S(t)) \subset \tilde{Z}$$

Illustration

Prenons pour éclatement $f : \tilde{Z} \rightarrow Z$ celui de l'origine dans $Z = \mathbb{C}^2$.

- Comme première famille $S(t)$ dans Z , prenons celle des droites parallèles au premier axe tandis que t est la "distance" de la droite à l'origine. Alors $\bar{S}(t)$ est difféomorphe à une droite pour tout $t \neq 0$ qui se déforme pour devenir pour $t = 0$ la réunion $\bar{S}(0)$ d'une droite affine ET d'une droite projective en position générale dans $\tilde{Z}$.

Dans ce cas on a $\bar{S}(t) = \widetilde{S(t)}$

tandis que $\overline{S(t)} = \overline{f^{-1}(S(t) - \{0\})} \subset \tilde{Z}$ est tel que

$\overline{S(0)} \subset S(0)$ n'est formée que de la droite, et

$\overline{(S(t))}_{t \in T}$ ne dépend pas algébriquement de $t \in T$.

- Comme deuxième famille $S'(t)$ dans Z , prenons les points du premier axe.

Alors $\bar{S}'(t)$ est un point pour tout t ;

- tandis que $\widetilde{S'(t)}$ est un point pour tout $t \neq 0$ et, lorsque $t = 0$, $\widetilde{S'(0)}$ est une droite projective.

- De plus $\overline{S'(t)}$ est un point pour tout $t \neq 0$ et $\overline{S'(0)}$ est vide pour $t = 0$.

- Ni $S'(t)$, ni $\bar{S}'(t)$ ne sont des familles dépendant algébriquement de t .

[[Pour être plus précis, donnons les équations :

Soient $(x,y) \in Z = \mathcal{C}^2$ et $\lambda \in \bar{P}^1 = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$, $t \in T = \mathcal{C}$, les points courants de Z , $\bar{P}^1$ et T .

Alors l'éclatement $f : \tilde{Z} \rightarrow Z$ est donné par

$$\tilde{Z} = \{((x,y), \lambda) \in Z \times \bar{P}^1 \mid x = \lambda y\} \subset Z \times \bar{P}^1$$

et
$$f((x,y), \lambda) = (x,y),$$

tandis que l'éclatement $g = f \times \text{Id}_T : \tilde{Z} \times T \rightarrow Z \times T$ est donné par :

$$\tilde{Z} \times T = \{((x,y), \lambda, t) \in Z \times \bar{P}^1 \times T \mid x = \lambda y\} \subset Z \times \bar{P}^1 \times T$$

et
$$g((x,y), \lambda, t) = (x,y).$$

- La première famille $S(t)$ est caractérisée par

$$\mathfrak{s} = \{((x,y), t) \in Z \times T \mid Z = T\}$$

Sa transformée $\bar{S}(t)$ sous l'éclatement $f : \tilde{Z} \rightarrow Z$ est caractérisée par la fermeture

$$\bar{\mathfrak{s}} = \overline{\{((x,y), \lambda, t) \in Y \times \bar{P}^1 \times T \mid x = \lambda y, y = t, t \neq 0\}} \subset \tilde{Z} \times T.$$

- La deuxième famille $S'(t)$ est caractérisée par $\mathfrak{s}' \subset Z \times T$ définie par

$$\mathfrak{s}' = \{((x,y), t) \in Y \times T \mid y = t, x = 0\} \subset Z \times T$$

Sa transformée $\bar{S}'(t)$ sous l'éclatement $f : \tilde{Z} \rightarrow Y$ est caractérisée par la fermeture :

$$\bar{\mathfrak{s}}' = \overline{\{((x,y), y, t) \in Z \times \bar{P}^1 \times T \mid x = \lambda y, y = t, x = 0, t \neq 0\}} \subset \tilde{Z} \times T$$

II.3 ECLATEMENT DEPENDANT D'UN PARAMETRE

Soit Z une variété algébrique non singulière ;

Soit T la variété algébrique non singulière de paramétrisation ;

Soit $M(t) \subset Z$ une sous variété algébrique non singulière dépendant analytiquement de $t \in T$;

Alors l'étude de la collection $(\tilde{Z}(t))_{t \in T}$ d'éclatements du même Z , mais de centre variable $M(t)$, est liée à l'étude de l'éclatement du produit $Z \times T$ centré en $(\bigcup_{t \in T} M(t)) \subset Z \times T$.

Exemple

$$z = (z_1, z_2) \in Z = \mathbb{C}^2 ; t = (t_1, t_2) \in T = \mathbb{C}^2$$

$$M(t) = (\text{le point } z_1 = t_1, z_2 = t_2 \text{ de } Z)$$

Donc $\bigcup_t M(t) = \Delta$ = la diagonale de $Z \times T$, et alors $\tilde{Z}(t) \subset Z \times \bar{P}^1$ est définie par

$$(z_1 - t_1)v_1 = (z_2 - t_2)v_2 \quad (\text{où } (v_1, v_2) \text{ sont les coordonnées homogènes dans } \bar{P}^1) ;$$

tandis que $\widetilde{Y \times T} \subset T \times \bar{P}^1$ est défini par

$$(z_1 - t_1)v_1 = (z_2 - t_2)v_2$$

ie par la même équation.

$$\text{Donc ici nous avons } \widetilde{Z \times T} = \bigcup_{t \in T} \tilde{Z}(t)$$

Seuls nous intéresseront parmi ces éclatements à centre variables ceux qui seront

soit tels que $\widetilde{Z \times T} \rightarrow T$ soit un fibré trivial,

ou tels que $\bigcup_{t \in T} \tilde{Z}(t) \rightarrow T$ soit un fibré trivial.

III - RELATION ENTRE L'ECLATEMENT ET LE THEOREME

DE DESINGULARISATION D'HIRONAKA

1. Lorsque le couple $(Y \supset M)$ est formé d'une variété non singulière et d'une sous variété non singulière fermée, alors l'éclatement de Y centré en M fournit une solution au problème de désingularisation d'Hironaka.
2. La relation générale entre la désingularisation d'un couple (Y, M) et l'éclatement est donnée par le théorème suivant d'Hironaka.

Théorème 2 d'Hironaka

Soit (Y, M) un couple formé

- d'une variété algébrique non singulière Y et
- d'un sous ensemble algébrique M ;

alors il existe une désingularisation

$\tilde{Y} \xrightarrow{f} Y$ de ce couple qui peut se factoriser en une suite finie

d'éclatements intermédiaires :

$$Y_{i+1} \xrightarrow{f_i} Y_i ; \quad f = f_s \circ f_{s-1} \circ \dots \circ f_i \circ \dots \circ f_0 ;$$

$$Y_{s+1} = \tilde{Y}$$

$$Y_0 = Y$$

tels que

- (i) chaque f_i est un éclatement de Y_i ;
- (ii) Y_i est non singulier $\forall i$;
- (iii) le centre D_i de f_i est une sous variété algébrique fermée sans singularité de Y_i ;
- (iv) $D_i \subset (f_{i-1} \circ f_{i-2} \circ \dots \circ f_0)^{-1} M$; $D_0 \subset M$

]].

IV - FONCTEUR, MODULE SUR UN FONCTEUR, GRASSMANNIENNE

D'UN MODULE QUASICOHERENT, ECLATEMENT

D'UN IDEAL SUR UN FONCTEUR

Les notions ci-dessous sont dues à C. Chevalley :

Soit $\underline{\underline{E}}$ la catégorie des ensembles (d'un univers)

Soit $\underline{\underline{A}}$ la catégorie des anneaux .

Alors $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ désigne la catégorie des foncteurs de $\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{E}}$

et $\underline{\underline{\mathcal{C}}}\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}$ désigne la catégorie des flèches de $\underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}$.

Si $S \in \underline{\underline{A}}\underline{\underline{E}}$ est un foncteur, si $X \in \underline{\underline{A}}$ est un anneau, alors l'ensemble $S(X)$ constitue ce que l'on appelle "l'ensemble des points de S à valeur dans X ".

a) Objet en anneau, objet en module sur un objet anneau dans une catégorie $\underline{\underline{C}}$

Si $\underline{\underline{M}} \xrightarrow{P} \underline{\underline{A}}$ est la catégorie des modules sur anneaux variables,

si $\varepsilon_M : \underline{\underline{M}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$, $\Delta = \varepsilon_A : \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$ sont les foncteurs "ensembles sous-jacents"

si $m \in \text{Ob } \underline{\underline{C}}$ et $a \in \text{Ob } \underline{\underline{C}}$ sont deux objets d'une catégorie $\underline{\underline{C}}$,

- on dit que a est un objet en anneau de $\underline{\underline{C}}$ si le foncteur $\hat{a} : \underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$,

$C \mapsto \text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(C, a)$ est muni d'une factorisation $\alpha : \underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{\underline{A}}$, au travers de

ε_A ie si $\hat{a} = \varepsilon_A \circ \alpha$.

- on dit que m est un objet en module de $\underline{\underline{C}}$ si le foncteur $\hat{m} : \underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$,

$C \mapsto \text{Hom}_{\underline{\underline{C}}}(C, m)$ est muni d'une factorisation $\mu : \underline{\underline{C}} \rightarrow \underline{\underline{M}}$ au travers du

foncteur oubli ε_M ie : $\hat{m} = \varepsilon_M \circ \mu$

- on dit que (m, μ) est un (objet en) module sur l'objet en anneau (a, α) , si en plus on a la relation $\alpha = P \circ \mu$, ie si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 & \underline{\underline{A}} & \xleftarrow{P} & \underline{\underline{M}} & \\
 \varepsilon_A \swarrow & & \alpha & & \searrow \varepsilon_M \\
 \underline{\underline{E}} & \xleftarrow{\hat{a}} & \underline{\underline{C}} & \xrightarrow{\hat{m}} & \underline{\underline{E}}
 \end{array}$$

b) Catégorie d'objets structurés pour l'espèce $\varepsilon : \underline{\underline{D}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$

1 - Rappelons que si $\underline{\underline{C}}$ est une catégorie quelconque, le foncteur pleinement fidèle $\underline{\underline{C}} \xrightarrow{\wedge} \underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{E}}$ défini par $X \mapsto \text{Hom}(\cdot, X)$, identifie $\underline{\underline{C}}$ à une sous-catégorie pleine $\hat{\underline{\underline{C}}}$ de la catégorie $\underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{E}}$ des contrafoncteurs sur $\underline{\underline{C}}$ à valeur ensembles.

2 - Tout foncteur $\varepsilon : \underline{\underline{D}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$, définit un foncteur $\underline{\underline{C}}^* \varepsilon : \underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{D}} \rightarrow \underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{E}}$
 (par la composition à gauche par ε).

3 - Le carré cartésien déterminé par les foncteurs $\underline{\underline{C}}^* \varepsilon$ et chapeau :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{C}}^*} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{D}} \\
 \hat{\varepsilon}_D \downarrow & \text{cartésien} & \downarrow \underline{\underline{C}}^* \varepsilon \\
 \underline{\underline{C}} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{E}}
 \end{array}
 \quad \left[\begin{array}{c} \underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{C}}} = \underline{\underline{C}} \times \underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{D}} \\ \underline{\underline{C}}^* \cdot \underline{\underline{E}} \end{array} \right]$$

définit, au-dessus de $\underline{\underline{C}}$, la catégorie

$$\begin{array}{c}
 \underline{\underline{D}}_{\underline{\underline{C}}} \\
 \downarrow \hat{\varepsilon}_D \\
 \underline{\underline{C}}
 \end{array}
 \quad \text{des } \varepsilon\text{-objets, de } \underline{\underline{C}}.$$

4 - En général, le foncteur $\varepsilon : \underline{\underline{D}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$ est le foncteur oublié correspondant à une espèce de structure.

A toute suite de foncteurs du type :

$$(1) \quad \underline{\underline{E}} \xleftarrow{\varepsilon_M} \underline{\underline{M}} \xrightarrow{P} \underline{\underline{A}} \xrightarrow{\varepsilon_A} \underline{\underline{E}}$$

et à toute catégorie $\underline{\underline{C}}$,

on peut [à l'aide des opérations élémentaires déjà décrites :

$$(\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{Q}}) \mapsto \underline{\underline{C}} \underline{\underline{Q}} \quad \text{et} \quad (\underline{\underline{C}}, \underline{\underline{E}}) \mapsto (\underline{\underline{C}} \xrightarrow{\Lambda} \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{E}}) \quad]$$

faire correspondre la suite de carrés cartésiens : (2)

$$\begin{array}{ccccccc} \underline{\underline{C}} & \xrightarrow{\Lambda} & \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{E}} & & & & \\ \uparrow \text{Cartésien} & & \uparrow C\varepsilon_M & & & & \\ \underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{C}}} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{M}} & \xrightarrow{CP} & \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{A}} & \xrightarrow{C\varepsilon_A} & \underline{\underline{C}}^* \underline{\underline{E}} \\ \uparrow & & \text{Cartésien} & & \uparrow \text{Cartésien} & & \uparrow \Lambda \\ \underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{CP}}} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{C}}} & \xrightarrow{\quad} & \underline{\underline{C}} & & \end{array}$$

Alors la ligne extérieure définit

$$\underline{\underline{C}} \xleftarrow{\quad} \underline{\underline{M}}_{\underline{\underline{CP}}} \xrightarrow{\pi} \underline{\underline{A}}_{\underline{\underline{C}}} \xrightarrow{\quad} \underline{\underline{C}}$$

la catégorie des ε_M -objets de $\underline{\underline{C}}$ qui sont au-dessus des ε_A -objets de $\underline{\underline{C}}$.

Dans notre cas, $\underline{\underline{M}} \xrightarrow{P} \underline{\underline{A}}$ sera le foncteur qui associe à tout module son anneau de base.

c) Exemples nous concernant

1°/ $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{E}}$ est la catégorie des ensembles. Les objets en anneau dans la catégorie des ensembles sont bien les ensembles munis d'une loi d'anneau ; etc...

2°/ $\underline{\underline{C}}$ est $\underline{\underline{E}}/B$: un objet $A \xrightarrow{a} B$, dans la catégorie des ensembles munis d'une application dans un ensemble de base fixe B , est un objet en anneau si l'ensemble image inverse $a^{-1}(b) = A_b$ de tout point $b \in B$ de la base, est un anneau.

Un objet $M \xrightarrow{m} B$, dans la même catégorie est dit objet en module sur $A \xrightarrow{a} B$ si pour tout $b \in B$ la fibre $m^{-1}(b) = M_b$ est un module sur A_b . De plus m est dit libre et de rang r sur a s'il en est ainsi de M_b sur A_b pour tout $b \in B$.

3°/ $\underline{\underline{C}}$ est $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$.

Un objet $S : \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$ est en anneau ou en module dans la catégorie des foncteurs de $\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{E}}$, si pour tout anneau $X \in \text{Ob } \underline{\underline{A}}$, $S(X)$ est un anneau au sens de 1°/

4°/ $\underline{\underline{C}}$ est $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}/S$.

Un objet $M \xrightarrow{m} S$, est un objet en module sur l'objet $A \xrightarrow{a} S$ dans la catégorie des foncteurs au-dessus d'un foncteur fixe S , si pour tout anneaux, l'objet $M(X) \xrightarrow{m(X)} S(X)$ est un module au-dessus de l'anneau $A(X) \xrightarrow{a(X)} S(X)$ au sens de 2°/

De plus m est dit libre et de rang $\underline{r}$ sur a , s'il en est ainsi de $m(X)$ sur $A(X)$ au sens de 2°/

En particulier, si $\Delta = \varepsilon_A : \underline{\underline{A}} \rightarrow \underline{\underline{E}}$ est le foncteur oubli, alors $\Delta_X S \rightarrow S$ est un anneau et on dit que $M \rightarrow S$ est un module sur le foncteur S si

c'est un module sur l'anneau $\Delta \times S \rightarrow S$.

De plus on dit que M est quasicohérent si, pour tout homomorphisme d'anneaux $\alpha : X \rightarrow Y$, la flèche $(M(\alpha), S(\alpha))$

$$\begin{array}{ccc} M(X) & \longrightarrow & S(X) \\ \downarrow M(\alpha) & & \downarrow S(\alpha) \\ M(Y) & \longrightarrow & S(Y) \end{array}$$

est une flèche d'extension de module au-dessus de l'homomorphisme d'anneaux $(\alpha.S(\alpha), S(\alpha))$

$$\begin{array}{ccc} X \times S(X) & \longrightarrow & S(X) \\ \downarrow \alpha.S(\alpha) & & \downarrow S(\alpha) \\ Y \times S(Y) & \longrightarrow & S(Y) \end{array}$$

d) Grassmannienne d'un module sur un foncteur

A la donnée d'un Module quasicohérent sur $S : M \rightarrow S$, et à tout entier r , C. Chevalley associe le foncteur (sur S) en grassmannienne $G_r^M \rightarrow S$, qui à tout anneau X fait correspondre l'application naturelle : $G_r^M(X) \rightarrow S(X)$, définie, comme étant

$$\mathbb{Z} \left| \begin{array}{c} G_r^M(X) \\ \downarrow \\ S(X) \end{array} \right\{ \begin{array}{c} F(X) \\ \downarrow \\ S(X) \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{ensemble sur } S(X) \text{ des sous modules } F(X) \subset M(X) \\ \text{de } M(X), \text{ tels que le quotient } M(X)/F(X) \text{ soit} \\ \text{un module libre de rang } r \text{ sur l'anneau } X \times S(X) \end{array} \right\}$$

autrement dit, la fibre de $G_r^M(X)$ au-dessus de $s \in S(X)$ est l'ensemble $G_r^M(X)|_s$ dont les éléments sont les sous-modules $F(X)|_s$ du module $M(X)|_s$ sur l'anneau X , tels que le quotient $M(X)_s/F(X)_s$ soit un module libre et de rang r sur X .

C'est la quasi cohérence de M sur S qui entraîne que G_r^M est bien un foncteur[♦] en X .

Remarque : Opérations dans $\underline{\underline{AE}}$

Toutes les belles opérations dans la catégories $\underline{\underline{E}}$, à savoir le produit, le produit fibré, la limite projective et leur duales, ie la somme, la somme amalgamée, la limite inductive, passent à la catégorie des foncteurs $\underline{\underline{AE}}$, et ce, objet par objet ;

C'est ainsi que nous avons utilisé le produit $\Delta \times S$ qui n'est autre que le foncteur $X \rightarrow \Delta(X) \times S(X)$ où $\Delta(X) \times S(X)$ est le produit usuel d'ensembles.

De même, une flèche $S' \rightarrow S$ de $\underline{\underline{AE}}$, définit un foncteur canonique image réciproque (encore appelé de changement de base) transformant tout objet G au-dessus de S en un objet G' au-dessus de S' , et le carré

$$\begin{array}{ccc} G' & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ S' & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array}$$

est celui qui pour tout anneau X donne le produit fibré $G'(X)$ des ensembles $S'(X)$ et $G(X)$ sur $S(X)$:

$$\begin{array}{ccc} G'(X) & \longrightarrow & G(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ S'(X) & \xrightarrow{\sigma(X)} & S(X) \end{array}$$

En utilisant maintenant les propriétés de la catégorie usuelle des modules à anneau de base variable, on montre que si $M \rightarrow S$ est un foncteur en module quasi cohérent sur S , alors l'image réciproque $M' \rightarrow S'$ est

[♦] $M \mapsto (G_r^M)$ est aussi un foncteur, mais c'est un autre aspect.

d'une part encore un module quasi cohérent sur S' d'autre part est bien l'image réciproque dans la catégorie des foncteurs en modules.

$\mathbb{Z}$ Il est immédiat d'après sa définition, que le foncteur grassmannienne $M \mapsto (G_r^M)$ commute aux changements de base.

Propriété universelle

La grassmannienne

$$\begin{array}{ccc} M^\tau & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ G_r^M & \xrightarrow{\tau} & S \end{array}$$

d'un module quasi cohérent $M \rightarrow S$ sur un foncteur S , munie de l'image réciproque de M par τ , vérifie dans la catégorie des modules au-dessus d'un foncteur variable, une propriété universelle évidente.

e) Eclatement d'un idéal sur un foncteur S

Si $J \rightarrow S$ est un idéal quasi cohérent de S (ie de $A \times S \rightarrow S$), alors on peut former la grassmannienne $G_r^J \rightarrow S$ et l'image inverse $J^\tau \rightarrow G_r^J$ par τ est encore un idéal de G_r^J .

Cet idéal possède encore la propriété universelle mentionnée plus haut, mais ce dans la catégorie des modules sur foncteur variable.

Il ne la possède plus dans la catégorie des idéaux sur foncteurs variables, dont le foncteur oubli vers la catégorie précédente n'est pas pleinement fidèle.

L' objet

$$\begin{array}{ccc} J^\sigma & \longrightarrow & J \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_r^J & \xrightarrow{\sigma} & S \end{array}$$

qui dans la catégorie des

idéaux sur foncteur variable possède la propriété universelle mentionnée

vis à vis de $J \rightarrow S$, peut se construire à partir de $G_r^J \rightarrow S$ de façon simple.

Lorsque $r = 1$, $\Gamma_1^J \rightarrow S$ se note encore $\tilde{S}^J \rightarrow S$ et s'appelle foncteur déduit

♦ qui est une catégorie qui s'envoie par foncteur oubli dans celle des flèches tordues de AE. (Voir page E.20)

du foncteur S par l'éclatement de l'idéal J.

[[

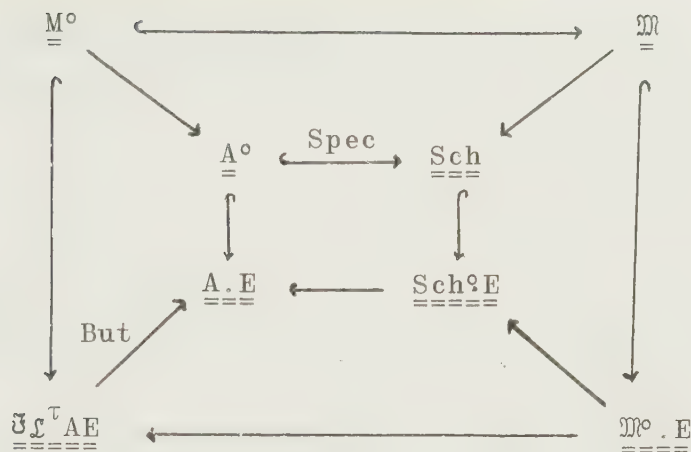
Notons que cette construction ne commute plus aux changements de base.

C'est ici que s'introduit la distinction entre les notions d'image
inverse et de transformée stricte.]]

V - LIEN AVEC LA GEOMETRIE : SCHEMAS ET FONCTEURS

A tout contrafoncteur canonique $\underline{\underline{A}}^\circ \xrightarrow{\text{Spec}} \underline{\underline{\text{EspAnn}}}$ de la catégorie $\underline{\underline{A}}$ des anneaux à celle des espaces annelés, on peut faire correspondre un foncteur canonique. $\underline{\underline{\text{EspAnn}}} \rightarrow \underline{\underline{A.E}}$ qui à tout espace annelé $\mathfrak{s}$, associe le foncteur $S = \hat{\mathfrak{s}} \in \underline{\underline{A.E}}$ défini par $\hat{\mathfrak{s}} : X \mapsto \text{Hom}_{\underline{\underline{\text{EspAnn}}}(\text{Spec } X, \mathfrak{s})}$.

Cartier a remarqué que lorsque le foncteur $\text{Spec} : \underline{\underline{A}}^\circ \rightarrow \underline{\underline{\text{EspAnn}}}$ est celui de Zariski [ie $\text{Spec } X = \{\text{idéaux premiers de } X\}$ muni de la topologie de Zariski et du faisceau d'anneaux usuel], tout schéma $\mathfrak{s} \in \underline{\underline{\text{Sch}}} \subset \underline{\underline{\text{EspAnn}}}$ est bien caractérisé par le foncteur $S = \hat{\mathfrak{s}} \in \underline{\underline{A.E}}$, et si X est un anneau alors $\hat{\mathfrak{s}}(X)$ est assimilable à "l'ensemble des points du schéma $\mathfrak{s}$ à valeur dans l'anneau X ". C. Chevalley a systématiquement exploité ce point de vue en étudiant la catégorie $\underline{\underline{A.E}}$. Pour comparer les diverses techniques, il met facilement en évidence le diagramme commutatif suivant de catégories



où $\underline{\underline{A}}$ est la catégorie des anneaux, $\underline{\underline{A}}^o$ son opposée ;
 $\underline{\underline{M}}$ est la catégorie des modules, $\underline{\underline{M}}^o$ son opposée ;
 $\underline{\underline{Sch}}$ est la catégorie des schémas, $\underline{\underline{Sch}}^o$ son opposée ;
 $\underline{\underline{M}}$ est la catégorie des modules quasicohérents, $\underline{\underline{M}}^o$ son opposée ;
 $\underline{\underline{E}}$ est la catégorie des ensembles
 $\underline{\underline{A.E}}$ est la catégorie des foncteurs de $\underline{\underline{A}}$ dans $\underline{\underline{E}}$;
 $\underline{\underline{U L^{\tau} A E}}$ est la catégorie des flèches tordues[♦] de $\underline{\underline{A.E}}$.

♦ Si $\underline{\underline{C}}$ est une catégorie admettant des produits fibrés, la catégorie des flèches tordues de $\underline{\underline{C}}$ est la catégorie $\underline{\underline{U L^{\tau} C}}$,
dont les objets sont les flèches de $\underline{\underline{C}}$,
et dont les morphismes $\begin{pmatrix} M \\ \downarrow \\ S \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} N \\ \downarrow \\ T \end{pmatrix}$ entre deux objets sont formés des couples $(\sigma, \rho) = \mu$ de morphismes de $\underline{\underline{C}}$ tels que le diagramme dans $\underline{\underline{C}}$

$$\begin{array}{ccccc} & \rho & N^{\sigma} & \longrightarrow & N \\ M & \swarrow & \downarrow & \text{cartésien} & \downarrow \\ & S & \xrightarrow{\sigma} & T & \end{array} \text{ soit commutatif.}$$

Un tel diagramme se note encore

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\rho} & N \\ \downarrow & & \downarrow \\ S & \xrightarrow{\sigma} & T \end{array} .$$

Remarquons que si S est un objet de $\underline{\underline{C}}$, la fibre de S pour $\underline{\underline{U L^{\tau} C}}$ est la catégorie opposée à celle formée par la fibre de S pour $\underline{\underline{U L C}}$

$\underline{\underline{A}}^\circ$ est équivalente à la catégorie des schémas affines et se plonge par le foncteur spectre de Zariski, comme sous catégorie pleine dans celle des schémas.

Les $S = \hat{\mathfrak{s}} \in \underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ provenant de schémas sont des foncteurs possédant tous la propriété d'être locaux au sens suivant :

choisir le foncteur de Zariski : $\underline{\underline{A}}^\circ \xrightarrow{\text{Spec}} \underline{\underline{Sch}}$, c'est en fait munir $\underline{\underline{A}}$ d'une structure de site à la Chevalley.

Une telle structure sur $\underline{\underline{A}}$ permet de distinguer certains objets de $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ que l'on nomme faisceaux, (ou parfois foncteurs locaux) et qui généralisent les faisceaux de J. Leray sur les espaces topologiques.

Les faisceaux sur le site $\underline{\underline{A}}$ forment une catégorie $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ et C. Chevalley montre que le foncteur oubli $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}} \rightarrow \underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ admet un adjoint $\underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}} \xrightarrow{\tau} \underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ (théorème du faisceau associé).

Pour finir ce tour d'horizon, il reste à décrire comment à tout foncteur $S \in \underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ sur notre site $\underline{\underline{A}}$ C. Chevalley associe fonctoriellement un espace annelé $\bar{S} = \mathfrak{s}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Cette opération} & \underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}} & \xrightarrow{\sigma} \underline{\underline{Espaces Annelés}} \\ & S & \mapsto \mathfrak{s} = \bar{S} = (|S|, \underline{\underline{0}}_S) \end{array}$$

est la suivante :

1°/ Si $S \in \underline{\underline{A}}.\underline{\underline{E}}$ est de la forme

$S : X \mapsto \text{Hom}_{\underline{\underline{A}}}(\underline{\underline{B}}, X)$ alors on prend $\mathfrak{s} = \bar{S} = \text{Spec } B$
(spectre de Zariski de l'anneau B).

2°/ Si S est quelconque, on forme l'ensemble $\varinjlim S$, limite inductive de la restriction du foncteur S à la sous catégorie (quasi filtrante) pleine des corps $\underline{K} \subset \underline{A}$. On obtient ainsi l'ensemble sous jacent $\varinjlim S$ à $\bar{S}$, ensemble qu'il est aisé de munir fonctoriellement d'une topologie qui coïncide avec celle de Zariski lorsque S est $\text{Hom}_{\underline{A}}(B, .)$ et que $|\bar{S}| = \varinjlim \text{Hom}_{\underline{A}}(B, .) = |\text{Spec } B|$.

3°/ A tout $S \in \underline{\underline{AE}}$, on associe l'anneau des sections globales de $\bar{S} = (|S|, \underline{0}_S)$, $\Gamma(S) = \text{Hom}_{\underline{\underline{AE}}}(S, \Delta)$ où $\Delta \in \underline{\underline{AE}}$ est la droite affine, c'est-à-dire où Δ est le foncteur oubli $\Delta : \underline{A} \rightarrow \underline{E}$, $X \mapsto (l'ensemble \text{ sous jacent à l'anneau } X)$.

4°/ A tout couple d'ouverts emboîtés $V \subset W \subset |S|$ on associe facilement d'abord des sous foncteurs emboîtés $S_V \subset S_W \subset S$, puis des homomorphismes transitifs d'anneaux :

$$\Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S_W) \rightarrow \Gamma(S_V)$$

Ceci définit un préfaisceau, qui est en fait un faisceau d'anneaux $\underline{0}_S$ sur l'espace $|\bar{S}|$.

Enfin disons, comme l'indique la figure, qu'à un module M sur un foncteur S on peut faire correspondre un faisceau en modules, noté par abus $\mathfrak{M} = \sigma M$, sur l'espace annelé $\sigma S = \bar{S}$. Réciproquement à un faisceau en modules $\mathfrak{M}$ sur un espace annelé $\mathfrak{s}$, on associe un foncteur en module, $M \mapsto S$ noté par abus $\rho \mathfrak{M} \rightarrow \rho \mathfrak{s}$, sur le foncteur $S = \rho \mathfrak{s}$.

On démontre alors le théorème suivant de C. Chevalley concernant les foncteurs

$$\underline{\underline{\text{Esp Ann}}} \xrightarrow{\rho} \underline{\underline{\text{A.E}}} \quad \mathfrak{s} \rightarrow \hat{\mathfrak{s}} = S$$

$$\underline{\underline{\text{A.E}}} \xrightarrow{\tau} \underline{\underline{\text{A.E}}} \quad F \rightarrow \tau F$$

$$\underline{\underline{\text{A.E}}} \xrightarrow{\sigma} \underline{\underline{\text{Esp Ann}}} \quad S \rightarrow \bar{S} = \mathfrak{s}$$

a) $\rho|_{\underline{\underline{\text{Sch}}}}$ commute aux limites projectives

b) $\sigma\rho|_{\underline{\underline{\text{Sch}}}}$ est l'identité de $\underline{\underline{\text{Sch}}}$

c) $\sigma = \sigma \circ \tau$

d) Si $M \rightarrow S$ est un module quasi cohérent sur un foncteur S et si $G_r^M \rightarrow S$ est le foncteur grassmannien associé à cette donnée. Alors si $\mathfrak{s} = \sigma(S)$ est un schéma, il en est de même de $\sigma(G_r^M) = \sigma \circ \tau(G_r^M)$ et dans ce cas on réserve le nom de foncteur grassmannien non pas à $G_r^M \rightarrow S$ mais à $\tau(G_r^M) \rightarrow \tau S$. Et $\sigma(G_r^M) \rightarrow \sigma S$ est la grassmannienne de rang r définie par M et S ou encore par $\mathfrak{M} = \sigma M$ sur $\mathfrak{s} = \sigma S$.

e) Si $J \rightarrow S$ est un idéal quasi cohérent sur un foncteur S et si $\Gamma_1^J \rightarrow S$ est l'éclaté du foncteur S le long de l'idéal J , alors si $\mathfrak{s} = \sigma(S)$ est un schéma, il en est de même de $\sigma(\Gamma_1^J) = \sigma \circ \tau(\Gamma_1^J)$, et dans ce cas on réserve le nom d'éclatement suivant l'idéal J , non pas à $\Gamma_1^J \rightarrow S$ mais à $\tau(\Gamma_1^J) \rightarrow \tau(S)$. Et $\sigma(\Gamma_1^J) \rightarrow \sigma(S)$ est l'éclaté de $\sigma(S)$ le long de $\sigma(J)$.

Remarque : Rappelons que le foncteur $\underline{\underline{\text{Sch}}} \rightarrow \underline{\underline{\text{Top}}}$ qui associe à tout schéma $\mathfrak{s}$ son espace topologique sous jacent $|\mathfrak{s}|$, ne commute pas aux limites projectives : notamment

si

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{F} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F} \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{S}
 \end{array}$$

est un produit fibré de schémas, alors le carré commutatif d'espaces topologiques

$$\begin{array}{ccc}
 |\mathcal{F} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F}| & \longrightarrow & |\mathcal{F}| \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 |\mathcal{F}| & \longrightarrow & |\mathcal{S}|
 \end{array}$$

n'est pas un produit fibré d'espaces topologiques, et l'on a une flèche unique θ rendant commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 |\mathcal{F} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{F}| & & & & \\
 \searrow & \nearrow & & \searrow & \\
 & |\mathcal{F}| \times_{|\mathcal{S}|} |\mathcal{F}| & & |\mathcal{F}| & \\
 & \downarrow & & \downarrow & \\
 & |\mathcal{F}'| & \longrightarrow & |\mathcal{S}| &
 \end{array}$$

diagramme ci-dessus et θ n'est en général pas l'identité.

A P P E N D I C E F

P R E S E N T A T I O N C A T E G O R I Q U E * D E S G R A P H E S

*Cf. Frédéric PHAM, Thèse, pour d'autres détails

I - LA CATEGORIE DES DOUBLES FLECHES D'ENSEMBLES POINTES

Cette catégorie est bien connue.

[[UN OBJET G est un couple d'applications (pointées)

$$G : (L, 0) \begin{matrix} \xrightarrow{\$} \\ \xleftarrow{\mathbb{B}} \end{matrix} (V, x)$$

appelées source et but envoyant un ensemble $(L, 0)$ dans un ensemble (V, x) telles que $\$(0) = \mathbb{B}(0) = x$.

L est appelé ensemble des lignes de G , (0) est un point supplémentaire qui sert à pointer $L \cup \{0\} = (L, 0)$; (V, x) est appelé ensemble des vertex de G , x est le vertex distingué dit vertex à l'infini qui sert à pointer $V \cup \{x\}$ noté (V, x) .

- Un morphisme $f : G \rightarrow G'$ de cette catégorie est un doublet d'applications pointées $f = (f_1, f_2)$, telles que le diagramme suivant soit "commutatif" :

$$\begin{array}{ccc} (L, 0) & \begin{matrix} \xrightarrow{\$} \\ \xleftarrow{\mathbb{B}} \end{matrix} & (V, x) \\ f_1 \downarrow & \begin{matrix} \xrightarrow{\$'} \\ \xleftarrow{\mathbb{B}'} \end{matrix} & \downarrow f_2 \\ (L', 0) & \begin{matrix} \xrightarrow{\$'} \\ \xleftarrow{\mathbb{B}'} \end{matrix} & (V', x) \end{array} \quad \text{ie} \quad \begin{cases} \$' \circ f_1 = f_2 \circ \$ \\ \mathbb{B}' \circ f_1 = f_2 \circ \mathbb{B} \end{cases} \quad]]$$

Remarque : La catégorie des doubles flèches d'ensembles pointés est la catégorie des foncteurs :

$$\underline{\text{Hom}} (. \rightrightarrows . , \underline{\text{ensembles pointés}}).$$

Or la catégorie des ensembles pointés admet : des objets nuls, des sommes amalgamées et des produits fibrés, elle admet donc des limites inductives et des limites projectives finies, (et même infinies). Il en va donc de même de toute catégorie de foncteurs à valeur dans cette catégorie, de plus les limites peuvent se calculer point par point ; autrement dit les foncteurs valeur en un point commutent à ces limites.

On a donc la proposition suivante :

Proposition

La catégorie des doubles flèches d'ensembles pointés admet

des objets nuls

des limites inductives

des limites projectives

De plus :

Le foncteur "1" "ensemble des lignes" ie $G \mapsto (L, 0)$

Le foncteur "2" "ensemble des vertex" ie $G \mapsto (V, x)$

Le foncteur "\$" "\$ource des lignes" ie $G \mapsto \$$ et

Le foncteur "B" "But des lignes" ie $G \mapsto B$

commutent aux limites inductives et projectives.

]]

Parmi les limites inductives citons les sommes directes, et les sommes amalgamées.

Parmi les limites projectives citons les produits et les produits fibrés.

Corollaire

Dans la catégorie des doubles flèches d'ensembles pointés,
comme dans celle des ensembles pointés,

Toute flèche admet une flèche noyau*.

Toute flèche admet une flèche conoyau.

Toute flèche noyau est un monomorphisme strict.

Toute flèche conoyau est un épimorphisme strict.

Tout momorphisme est une flèche noyau d'une flèche conoyau, et est
une injection.

Toute flèche conoyau est conoyau d'une flèche noyau.

Malheureusement un épimorphisme n'est en général pas une flèche
conoyau, (mais est cependant une surjection).

Tout monomorphisme admet une flèche noyau qui est une flèche nulle.

Tout épimorphisme admet une flèche conoyau qui est une flèche nulle.]]

C'est en raison de ces belles propriétés qu'il n'y a pas
lieu de démolir cette catégorie mais au contraire, de l'utiliser au
mieux.

* Rappel

- une flèche nulle est une flèche qui se factorise au travers d'un
objet nul (ie à la fois initial et final)

* Un monomorphisme est une flèche qui n'égale jamais deux flèches
différentes qui la précèdent ie α monomorphisme $(\alpha f = \alpha g) \Rightarrow (f = g)$.
Un épimorphisme τ est une flèche qui n'égale jamais deux flèches
différentes qui la suivent ie τ épimorphisme $(f\tau = g\tau) \Rightarrow (f = g)$.
Un monomorphisme FAIBLE, est une flèche dont le noyau est nul, ce n'est
pas un monomorphisme.
Un épimorphisme FAIBLE est une flèche dont le conoyau est nul.

Ici les objets nuls sont $(0) \rightrightarrows (x)$.

- une flèche noyau est un noyau $N \rightarrow G$ d'une double flèche $G \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{smallmatrix} G'$ de la catégorie, dont l'une est une flèche nulle.
- une flèche conoyau est un conoyau $G' \rightarrow K$ d'une double flèche dont l'une est une flèche nulle.

$$N \rightarrow G \begin{smallmatrix} f \\ \rightrightarrows \\ 0 \end{smallmatrix} G' \rightarrow K$$

II - GRAPHIQUE : LIGNES INTERNES ET LIGNES EXTERNES

La catégorie des GRAPHIQUES est la sous-catégorie G de la précédente :

dont les objets $G : (L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} (V, x)$ sont les doubles flèches d'ensembles pointés FINIS (resp. dénombrables) ;

dont les morphismes $f = (f_1, f_2) : G \rightarrow G'$ sont intérieurs.

$$\begin{array}{ccccc}
 G & (L, 0) & \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} & (V, x) \\
 f \downarrow & f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\
 G' & (L', 0) & \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} & (V', x)
 \end{array}$$

ie tels que f_1 et f_2 sont des monomorphismes FAIBLES,

ie tels que (i) $f_2^{-1}(\{x\}) = \{x\}$ et (ii) $f_1^{-1}(\{0\}) = \{0\}$,

ie f_1 et f_2 n'envoient sur le point distingué que le point distingué ;

Proposition

(a) Le foncteur d'inclusion de la catégorie des GRAPHIQUES dans la catégorie des DOUBLES FLECHES D'ENSEMBLES POINTES, commute aux limites inductives ou projectives finies (ou dénombrables)

(b) Dans la catégorie des GRAPHIQUES, les morphismes sont compatibles à la partition canonique $L = E \cup J$ de l'ensemble des lignes de

tout objet $G : (L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} (V, x)$

en lignes EXTERNES $E = L \cap (S^{-1}(\{x\}) \cup B^{-1}(\{x\}))$ et

en lignes INTERNES $J = L \cap (S^{-1}(V) \cap B^{-1}(V)) = L - E$.

Preuve

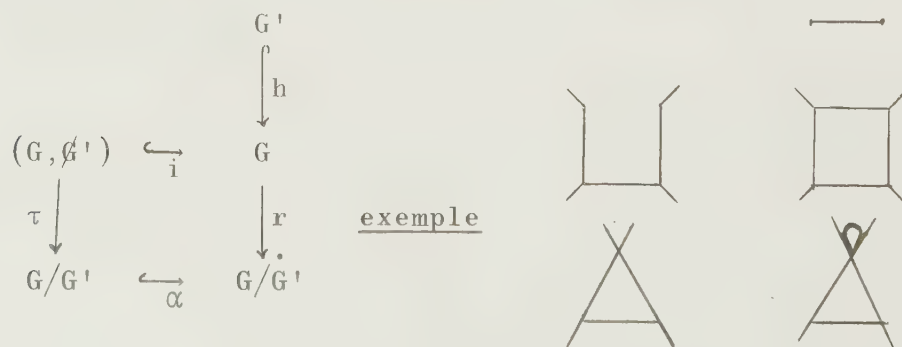
Il suffit de vérifier (a) pour les produits fibrés et sommes amalgamées, ce qui est trivial ; (b) est une conséquence immédiate de la définition des morphismes intérieurs.]]

III - CONTRACTE PARTIEL, GRAPHE RELATIF

A partir d'un sous graphe $G' \xhookrightarrow{h} G$ d'un graphe G (ie h est un monomorphisme), on construit les graphes suivants :

- 1°) $G/\dot{G}'$, c'est G dans lequel on a rendu équivalents les vertex liés par une même ligne de G' .
- 2°) G/G' , c'est $G/\dot{G}'$ dans lequel on a effacé les anciennes lignes de G' .
- 3°) (G, G') , c'est G dans lequel on a effacé les lignes de G' .

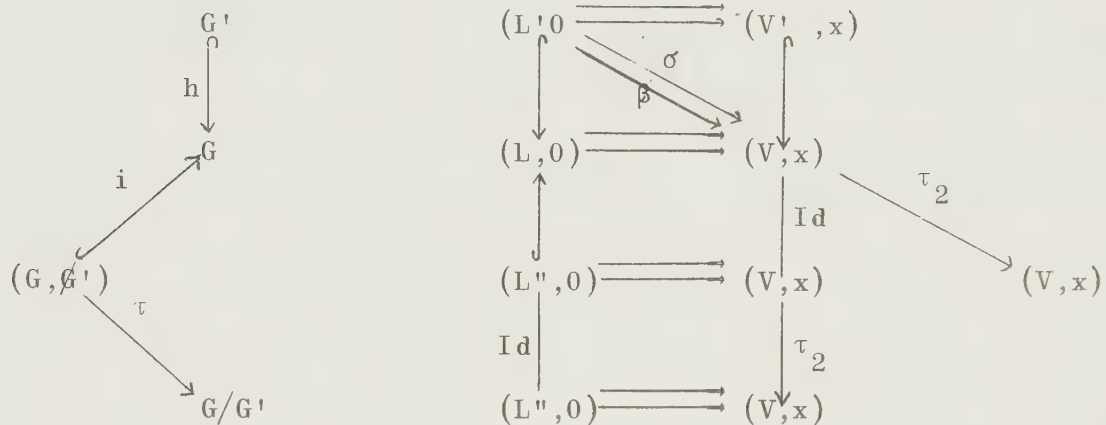
On a alors, dans la catégorie des graphiques, le diagramme commutatif suivant



| Ce carré est à la fois cartésien et cocartésien :

$(G, \dot{G}')$ est le produit de G et $\dot{G}/\dot{G}'$ sur $\dot{G}/\dot{G}'$
 $\dot{G}/\dot{G}'$ est la somme amalgamée de G et G/G' sous $(G, \dot{G}')$.

Si l'on explicite ce diagramme on a :



où τ_2 est le conoyau de la DOUBLE flèche (σ, β)

où $(L, 0) = (L', 0) + (L'', 0)$ somme directe

où i est un noyau et τ est un épimorphisme.

De plus $\dot{G}/\dot{G}'$, est $(L, 0) \xrightarrow[\tau_2 \circ B]{\tau_2 \circ S} (\dot{V}, x)$.

Definition

$G'' = G/G'$ s'appelle le contracté de G suivant G' ou encore le graphe relatif G/G' .

Remarque : Il n'y a, en général, aucun morphisme de notre catégorie allant de G à G/G' ou de G/G' à G (il n'y a du moins pas les morphismes que l'on croit).

Notation

Cependant, pour indiquer que G'' est un contracté de G , F .

Pham utilise la notation

$$G \longrightarrow G''$$

cependant $\longrightarrow$ n'est PAS un morphisme de notre catégorie des graphiques, et c'est encore moins un conoyau.

Justification : elle est donnée ci-après.

IV - CATEGORIE DES GRAPHS ABSTRAITS

(a) Monomorphisme UNITAIRE de graphiques $\mu : G' \hookrightarrow G$;

c'est un monomorphisme $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ tel que $\mu_2 = \underline{\text{identité}}$

$$\text{ie} \quad \begin{array}{ccc} G' & : & (L', 0) \longrightarrow (V, x) \\ \mu \downarrow & & \downarrow \mu_1 \quad \underline{\text{injection}} \quad \downarrow \quad \underline{\text{identité}} \\ G & & (L, 0) \longrightarrow (V, x) \end{array}$$

(b) Les monomorphismes unitaires forment une sous-catégorie $C_0 \subset C$ de celle des graphiques.

]]

(c) Monomorphismes unitaires ADJOINTS :

Si $\mu : F \hookrightarrow G$ est un monomorphisme unitaire, on dit que $\mu^* : F^* \hookrightarrow G^*$ est ADJOINT de μ ,

- 1) si μ^* est un monomorphisme unitaire
- 2) si le produit fibré $F^* \times_G F$ est le graphe $(G, \emptyset)$ déjà défini.
(G auquel on a retiré toutes ses lignes).

l'adjonction est une involution.

(d) Noyau d'un graphique ,

Soit $G : (L, 0) \xrightarrow[\beta]{\alpha} (V, x)$ un graphique, on nomme NOYAU de G ,
le monomorphisme unitaire $v : F \hookrightarrow G$, défini par le diagramme
commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc}
 F & & (L', 0) \\
 \downarrow v & & \downarrow v_1 \\
 G & & (L, 0)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 & \xrightarrow{\sigma} & (V, x) \\
 & \beta & \downarrow \text{id} \\
 & \xrightarrow[S]{\quad} & (V, x) \\
 & \xrightarrow[B]{\quad} &
 \end{array}$$

où v_1 est le noyau de la DOUBLE flèche (S, B) de b , et où σ et β sont les composées $\sigma = S \circ v_1 = \beta = B \circ v_1$.

(e) La classe Γ et la classe Γ^*

On désigne par Γ la classe des NOYAUX de graphiques, c'est une classe de monomorphismes unitaires on désigne par Γ^* la classe des ADJOINTS AUX NOYAUX de graphiques.

(f) La catégorie $\Gamma^* \setminus \underline{C}$

Etant donné une catégorie $\underline{C}$ munie d'une classe de monomorphismes $\Gamma^* \subset \underline{C}$, on définit une catégorie $\Gamma^* \setminus \underline{C}$ et un foncteur $Q : \underline{C} \rightarrow \Gamma^* \setminus \underline{C}$ comme possédant la propriété universelle suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 \underline{C} & \xrightarrow{Q} & \Gamma^* \backslash \underline{C} \\
 & \searrow R & \downarrow \tilde{R} \\
 & & \underline{D}
 \end{array}
 \quad (\exists!) \tilde{R} \circ R = \tilde{R} \circ Q$$

$Q : \underline{C} \rightarrow \Gamma^* \backslash \underline{C}$, envoie toute flèche de Γ^* sur une flèche munie d'une rétraction canonique.

Tout foncteur $R : \underline{C} \rightarrow \underline{D}$ qui envoie toute flèche de Γ^* sur une flèche admettant une rétraction CANONIQUE (ie une INVERSE à GAUCHE CANONIQUE) se factorise uniquement par Q ; $\Gamma^* \backslash \underline{C}$ s'appelle la catégorie des fractions⁺ à gauche de C relativement à la classe Γ^* .

(g) LA CATEGORIE DES GRAPHES ABSTRAITS est la catégorie des FRACTIONS A GAUCHE de la catégorie des graphiques relativement à la classe des monomorphismes unitaires adjoints aux noyaux de graphiques.

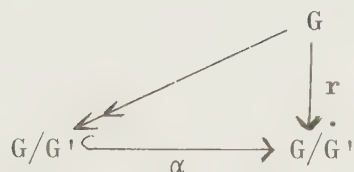
(h) La notation $G \mapsto G''$ est ainsi totalement justifiée c'est bien une flèche dans la catégorie des graphes abstraits et l'on a le triangle commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 & G & \\
 & \swarrow & \downarrow r \\
 G/G' & \xleftarrow{\beta} & G/G'
 \end{array}$$

où β est l'inverse à gauche canonique de $\alpha : G/G' \hookrightarrow G/G'$.

+ Pour plus de détails, voir Gabriel cours Pecot 1965.

[Par contre le triangle



n'est pas commutatif.]

V - UNE CONSTRUCTION CANONIQUE

Soit $G : (L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} (V, x)$ un graphique,

Soit $(L, 0) = (E, 0) + (J, 0)$ la décomposition canonique de $(L, 0)$ somme directe d'espaces pointés où $E = L \cap (\mathbb{S}^{-1}(x) \cup \mathbb{B}^{-1}(x))$.

Grâce à la succession des foncteurs :

Groupe abélien libre,

Produit tensoriel par $\mathbb{C}^4$

Noyau de double flèche de groupes abéliens,

on associe successivement et canoniquement à G :

- La double flèche de groupes abéliens libres

$$Z(E, 0) \oplus Z(J, 0) = Z(L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} Z(V, x)$$

- la double flèche d'espaces vectoriels complexes

$$\mathbb{C}^4(E, 0) \oplus \mathbb{C}^4(J, 0) = \mathbb{C}^4(L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} \mathbb{C}^4(V, x)$$

- le noyau de cette double flèche :

$$0 \rightarrow N(G) \rightarrow \mathcal{C}^4(L, 0) \begin{matrix} \xrightarrow{\$} \\ \xrightarrow{\mathbb{B}} \end{matrix} \mathcal{C}^4(V, x)$$

Lemme F.1

Ici ce noyau est régulier par rapport à la somme directe c'est-à-dire qu'il admet la décomposition canonique :

$$N(G) = N_x(G) \oplus N_B(G) \quad \text{où} \quad \begin{cases} N_x(G) = N(G) \cap \mathcal{C}^4(E, 0) \\ N_B(G) = N(G) \cap \mathcal{C}^4(J, 0) \end{cases}$$

On peut prendre

- pour base de l'espace vectoriel* $N_x(G)$ un certain sous ensemble $(E - C) \subset E$ non canonique de E ,
- pour base de l'espace vectoriel* $N_B(G)$ un certain sous ensemble $B \subset J = L - E$ non canonique du complément de E dans L .

Preuve

Lorsque l'on munit $\mathcal{C}^4(L, 0)$ de sa base canonique, les relations dont $N(G)$ et $N_x(G)$ sont les noyaux sont à coefficients pris dans $\{-1, 0, +1\}$.

Remarque sur C et B : L'équivalence dans V engendrée par :

$[\$^{-1}(\{v_1\} \cup \{v_2\}) \cap \mathbb{B}^{-1}(\{v_1\} \cup \{v_2\}) \cap J]$ non vide $\Rightarrow v_1 \sim v_2$ dans V , s'appelle la connexité intérieure de G (pour V).

Elle induit dans E une équivalence par :

$[((\$ (e_1) \cup \mathbb{B}(e_1)) \cap V) \sim ((\$ (e_2) \cup \mathbb{B}(e_2)) \cap V)] \Rightarrow e_1 \sim e_2$ dans E encore appelée connexité intérieure de G (pour E).

*Plus exactement : du $\mathcal{C}^4$ -module.

Alors $(E - C) \subset E$ est une base de $N_x(G)$, si et seulement si C est constitué d'un et d'un seul élément par composante connexe intérieure de E .

On dit que choisir B , c'est choisir un système de boucles de base du graphe G .

Remarque importante : Le foncteur $G \rightarrow N(G)$ de la catégorie des graphiques à celle des espaces vectoriels sur $\mathcal{C}$ se factorise uniquement au travers du foncteur de passage aux graphes abstraits.

Soit $n \in N(G)$ un point de $N(G)$ et soient

$(\underline{r}_j)$ ses quadri-coordonnées dans $\mathcal{C}^4(L, 0)$

$t = (\underline{p}_e)$ les quadricoordonnées de sa projection t dans $N_x(G)$

$z = (\underline{q}_b)$ les quadricoordonnées de sa projection z dans $N_B(G)$

on a alors les relations

$$\underline{r}_j = \sigma_j^e \underline{p}_e + \tau_j^b \underline{q}_b$$

Les matrices d'incidence σ et τ ainsi obtenues sont à coefficients pris dans $\{-1, 0, 1\}$ et ne dépendent que du graphe abstrait et des bases choisies.

[On peut donc encore caractériser les propriétés les plus importantes de G par la donnée

$$G = (E, B \subset J, \sigma \text{ et } \tau)$$

où E , B et J sont des ensembles finis et où σ et τ sont des matrices

$$\sigma : J \times E \rightarrow \{-1, 0, 1\} \leftarrow J \times B : \tau$$

ceci forme un aspect algébrique du problème].

VI - LA CATEGORIE DES GRAPHS

Un GRAPHE $G(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ est la donnée :

- (i) d'un graphe abstrait G
- (ii) de $\mathfrak{N} \subseteq N(G)$, c'est-à-dire de l'espace vectoriel $N(G)$ canoniquement associé à G et muni d'un sous ensemble $\mathfrak{N}$, appelé ensemble des valeurs $n \in \mathfrak{N}$ de G .

[[Pour la commodité, on peut supposer que l'on a choisi une base de la décomposition

$$N(G) = N_x(G) \oplus N_B(G)$$

et que $n = (t, z) \in \mathfrak{N} \subseteq N(G)$.

Alors les composantes de n s'appellent

$$\begin{aligned} t &= (p_e) \in N_x(G), \text{ le } \underline{\text{paramètre externe}} \\ z &= (q_b) \in N_B(G), \text{ la } \underline{\text{variable d'integration}} \end{aligned}$$

On pose encore $N_x(G) = T_G$ et $N_B(G) = Z_G$ quand on considère ces espaces vectoriels comme des espaces numériques complexes.]]

- (iii) De la "masse" du graphe, c'est-a-dire d'un ensemble $\mathfrak{M}$ d'applications $m : (L, 0) \rightarrow \mathcal{C}$.

Un MORPHISME de graphes est un morphisme de graphes abstraits $f : G \rightarrow G'$ compatibles ponctuellement* aux valeurs $(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ et $(\mathfrak{N}', \mathfrak{M}')$ que peuvent prendre les graphes $G(\mathfrak{N}, \mathfrak{M})$ et $G'(\mathfrak{N}', \mathfrak{M}')$.]]

*en un sens que nous n'explicitons pas.

VII - OBJETS GEOMETRIQUES ASSOCIES A UN GRAPHE (RAPPEL* ET COMPLEMENT)

(a)

Soit $G : (L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} (V, x)$, un graphe ;

Soit $E = \mathbb{S}^{-1}(x) \cup \mathbb{B}^{-1}(x)$, son ensemble de lignes externes ;

Soit $J = L - E$, son ensemble de lignes internes ;

Soit $0 \rightarrow N(G) \rightarrow \mathcal{C}^4(L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} \mathcal{C}^4(V, x)$, son noyau vectoriel ;

Soit $r = (\underline{r}_j, \underline{r}_e)$, les coordonnées d'un point dans $\mathcal{C}^4(L, 0) = \mathcal{C}^4(J, 0) \times \mathcal{C}^4(E, 0)$;

Soit $N(G) = Z_G \times T_G$, la décomposition canonique de $N(G)$,

avec $Z_G = N_B(G) = N(G) \cap \mathcal{C}^4(J, 0)$ et $T_G = N_x(G) = N(G) \cap \mathcal{C}^4(E, 0)$;

Alors pour tout $j \in J$, on désigne par :

- $Q_{j\varepsilon}$, le propagateur ou fonction polynomiale définie sur $N(G)$
par $Q_{j\varepsilon} \equiv \underline{r}_j^2 + m_j^2 + i\varepsilon$;
- $\mathfrak{s}^j \subset N(G) = Z_G \times T_G$, la "quadrique" formée par les zéros de $Q_{j\varepsilon}$
c'est-à-dire : $\mathfrak{s}^j = \{n = (\underline{r}_j, \underline{r}_e) \in N(G) \mid \underline{r}_j^2 + m_j^2 + i\varepsilon = 0\}$.

Le premier objet géométrique E_G associé à G est

$$E_G = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \subset Z_G \times T_G \rightarrow T_G)$$

où les composantes irréductibles de la surface polaire $\mathfrak{s}$ sont les

$(\mathfrak{s}^j)_{j \in J}$ ci-dessus et sont donc indexées par l'ensemble J des lignes internes.

*Cf. Chap. II §I et appendice F §II et V.

Le deuxième objet géométrique (obtenu à partir du premier par compactification algébrique, disons boucle par boucle, X_G de Z_G et maladroitement noté :)

$$E_G = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}_D \subset X_G \times T_G \rightarrow T_G)$$

voit les composantes irréductibles $\mathfrak{s}^j$ ou $\mathfrak{s}^b$ de son diviseur $\mathfrak{s}$ indexées par la réunion disjointe $J \cup B$ des ensembles des lignes internes j et de boucles b du graphe G .

[En effet, cette compactification $Z_G \hookrightarrow X_G$ introduit, en plus de la fermeture $\bar{\mathfrak{s}}^j$ de $\mathfrak{s}^j$ dans $X_G \times T_G$, de nouvelles surfaces (une par boucle et figurant au numérateur ou au dénominateur) qui proviennent de la continuation de la forme $\omega_G \cdot \pi Q_{j\epsilon}$].

(b)

Tout morphisme $f = (f_1, f_2) : G \rightarrow G'$ de graphes, de

$$\begin{array}{ccc} (L, 0) & \xrightleftharpoons[\mathbb{B}]{\mathfrak{s}} & (V, x) \\ f_1 \downarrow & & \downarrow f_2 \\ (L', 0) & \xrightleftharpoons[\mathbb{B}]{\mathfrak{s}} & (V', x) \end{array}$$

"passe" au noyaux vectoriels associés pour donner un morphisme

$$N(f) : N(G) \rightarrow N(G')$$

$\mathbb{Z}$ | Rappelons que nous n'admettons comme morphismes de graphes que les morphismes intérieurs :

- La classe des MORPHISMES INTERIEURS est celle des morphismes $f = (f_1, f_2) : G \rightarrow G'$ tels que
 - (i) $f_2^{-1}(\{x\}) = \{x\}$, ie qui n'envoient que le vertex distingué sur le vertex distingué x .
 - (ii) $f_1^{-1}(\{0\}) = (\{0\})$;
 - Les morphismes intérieurs sont donc compatibles à la partition $L = E \cup J$ des lignes en internes et externes.
- Si f est intérieur alors $N(f)$ est compatible à la factorisation $N(G) = N_B(G) \times N_x(G) = Z_G \times T_G$ donc f envoie une boucle dans une boucle et envoie boucle de base sur boucle de base (si le choix de $B \subset J$ a été fait de façon cohérente, ce que nous supposerons).

On a donc la proposition suivante :

Proposition 1

Si $f : G \rightarrow G'$ est un morphisme (qui est donc intérieur),
 Si E_G et $E_{G'}$ sont les objets géométriques associés, alors f fait correspondre à chaque composante irréductible s^j (resp. s^b) du diviseur s de E_G une et une seule composante irréductible $s^{f(j)}$ (resp. $s^{f(b)}$) du diviseur s' de $E_{G'}$.]]

(c)

Proposition 2

Les correspondances : $G \mapsto N(G)$; $G \mapsto T_G$; $G \mapsto Z_G$; $G \mapsto X_G$ définissent des foncteurs sur la catégorie des graphes et à valeur dans celle des espaces topologiques.]]

Corollaire

$$G \mapsto E_G = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s} \subset Z_G \times T_G \rightarrow T_G)$$

et $G \mapsto E_G = (\mathfrak{s} \subset \mathfrak{s}_D \subset X_G \times T_G \rightarrow T_G)$

définissent des FONCTEURS :

$$\underline{G} \rightarrow \underline{E}_{VAL}^L$$

sur la catégorie des graphes $\underline{G}$,

à valeur dans la catégorie $\underline{E}_{VAL}^L$ des OBJETS GEOMETRIQUES ALGEBRIQUES déjà définie*

Preuve

Si $f = (f_1, f_2) : G \rightarrow G'$ est un morphisme de $\underline{G}$,
le morphisme $E(f) : E_G \rightarrow E_{G'}$, est essentiellement défini par le couple d'applications :

$$N(f) : N(G) \rightarrow N(G'), N_x(f) : N_x(G) \rightarrow N_x(G')$$

et il est immédiat que

$$N(f)^{-1}(\mathfrak{s}, j) = \bigcup_{k \in f^{-1}(j)} (\mathfrak{s}^k) \quad]].$$

(d)

Limites inductives de graphes et objets géométriques

Les limites inductives finies existent dans la catégorie des graphes $\underline{G}$.

*Cf. Chap. III §V page 58 ou appendice G § IV.72 page G.27.

De plus le foncteur $G \mapsto N(G)$ sur $\underline{G}$ et à valeur dans la catégorie des $\mathcal{C}^4$ modules commute aux limites inductives :

[En effet c'est le composé de trois foncteurs commutant chacun aux limites inductives` soit successivement :

groupe abélien libre sur un ensemble pointé ;

tensorisation par $\mathcal{C}^4$;

prise du noyau d'une double flèche.]

Donc si $(f_\alpha, G) = \varinjlim (f_{\alpha\alpha'} : G_{\alpha'} \rightarrow G_\alpha)$ est une limite inductive finie de graphes suivant un foncteur $f : \underline{A} \rightarrow \underline{G}$

alors $(N(f_\alpha), N(G)) = \varinjlim (N(f_{\alpha\alpha'}) : N(G_{\alpha'}) \rightarrow N(G_\alpha))$

est la limite inductive des noyaux vectoriels associées.

$(E(f_\alpha), E_G)$ n'est évidemment pas limite inductive dans $\underline{E}_{VAL}^L$ de la collection d'objets géométriques :

$$(E(f_{\alpha\alpha'}) : E_{G\alpha'} \rightarrow E_{G\alpha}) \quad ;$$

cependant les triangles

$$\begin{array}{ccc} E_{G\alpha'} & \xrightarrow{E(f_{\alpha\alpha'})} & E_{G\alpha} \\ & \searrow E(f_{\alpha'}) & \searrow E(f_\alpha) \\ & & E_G \end{array}$$

sont commutatifs dans $\underline{E}_{VAL}^L$ et c'est bien E_G l'objet géométrique qui nous intéressera.

Exemple (i) : Somme directe $G_1 \coprod G_2$

$$\text{Soit } G_1 : (L_1, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}_1]{\mathbb{S}_1} (V_1, x)$$

$$G_2 : (L_2, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}_2]{\mathbb{S}_2} (V_2, x)$$

deux graphes.

Alors leur somme directe $G : (L, 0) \xrightarrow[\mathbb{B}]{\mathbb{S}} (V, x)$ n'est autre que le graphe obtenu par juxtaposition :

$$L = L_1 \cup L_2, \quad V = V_1 \cup V_2$$

$$\text{et } \mathbb{S}|_{L_1} = \mathbb{S}_1, \quad \mathbb{S}|_{L_2} = \mathbb{S}_2$$

$$\mathbb{B}|_{L_1} = \mathbb{B}_1, \quad \mathbb{B}|_{L_2} = \mathbb{B}_2.$$

Alors $N(G) = N(G_1) \times N(G_2)$ et $T_G = T_{G_1} \times T_{G_2}$ (somme directe d'ev, ie PRODUIT d'espace topologique)

$$\text{et si } E_{G_1} = (\mathbb{s}_1 \subset \mathbb{s}_1 \subset N(G_1) \rightarrow T_{G_1})$$

$$\text{et } E_{G_2} = (\mathbb{s}_2 \subset \mathbb{s}_2 \subset N(G_2) \rightarrow T_{G_2})$$

$$\text{alors } E_G = (\mathbb{s} \subset \mathbb{s} \subset N(G) \rightarrow T_G)$$

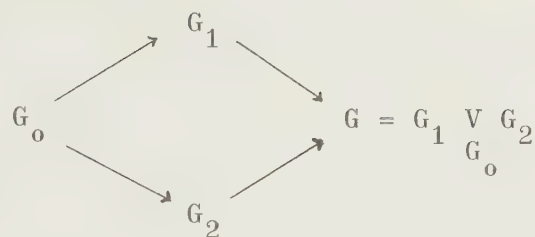
$$\text{où } \mathbb{s} = (\mathbb{s}_1 \times N(G_2)) \cup (N(G_1) \times \mathbb{s}_2)$$

et où la flèche $E_{G_1} \rightarrow E_G$ est essentiellement donnée par

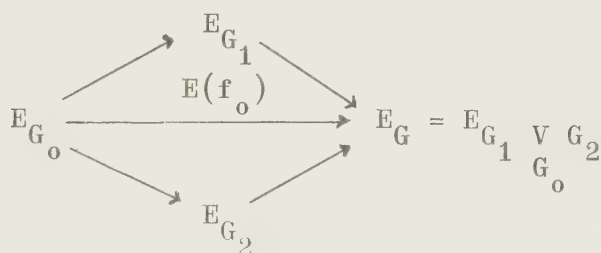
$$N(G_1) \ni n_1 \mapsto (n_1, 0) \in N(G_1) \times N(G_2) = N(G)$$

Exemple (ii) : somme amalgamée $G = G_1 \underset{G_0}{V} G_2$

Le carré cocartésien de graphes



donne le carré commutatif (non cocartésien) d'objets géométriques de $\underline{E}_{VAL}^L$:



G s'obtient à partir de $G_1 \coprod G_2$ en les identifiant suivant G_0 .

Nous ne décrivons pas E_G bien que cela soit aisé.

Nous nous servons des sommes amalgamées comme moyen d'étude constructive de graphes fondée sur la remarque suivante :

Remarque fondamentale :

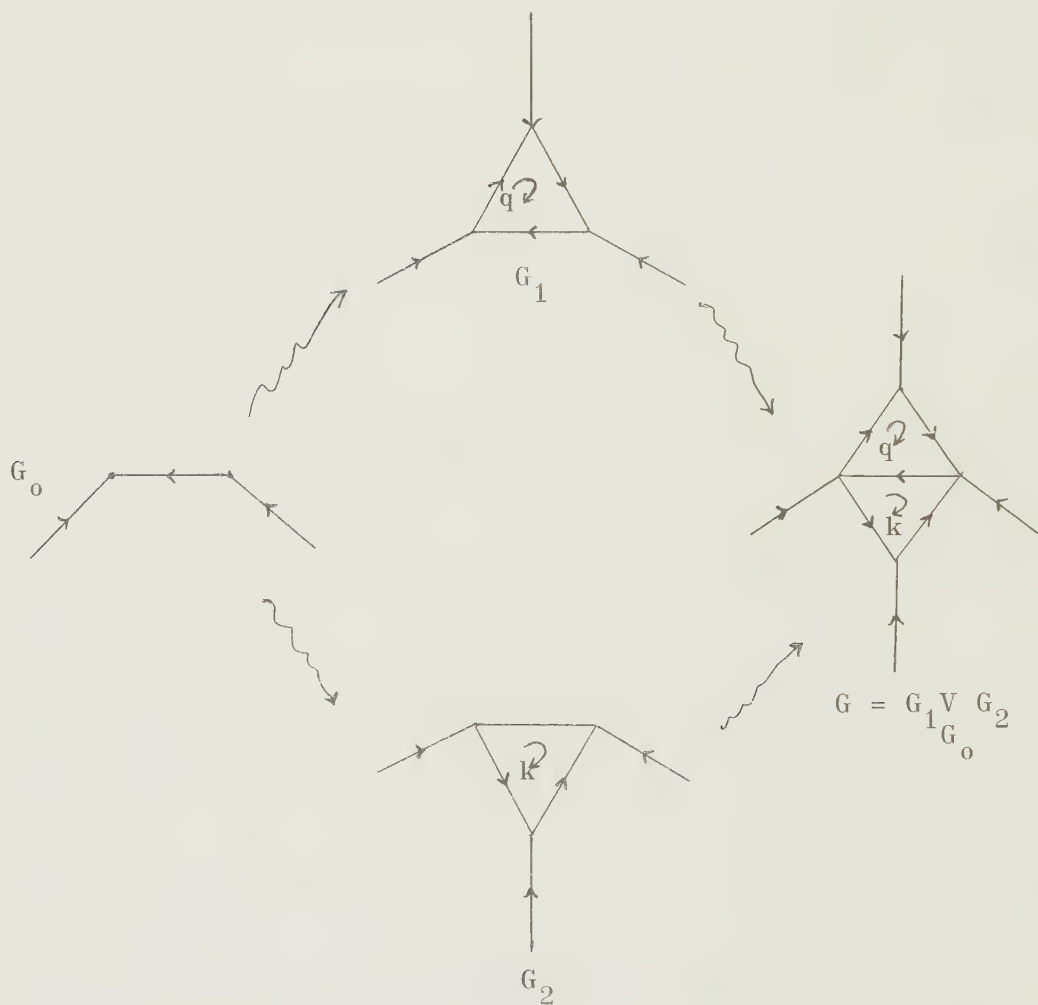
$\mathbb{Z}$ Si E_{G_1} et E_{G_2} sont propres et à croisements normaux ;
 et si $G = G_1 \underset{G_0}{V} G_2$, alors E_G est propre et à croisements normaux sauf éventuellement sur celles des composantes irréductibles de son diviseur qui portent l'image de celles de E_{G_0} sous $E(f_0) : E_{G_0} \rightarrow E_G$.

[Il existe en effet alors un point $t \in T_G$ de l'espace des paramètres de G pour lequel la fibre de E_G est à croisements normaux en ce qui

concerne les surfaces "étrangères à G_0 ".

]]

Voici un exemple simple de somme amalgamée de graphes.



QUELQUES ERREURS -----

Page	Ligne	au lieu de :	lire :
2	-9	S topologiquement	Z topologiquement
3	-5	ie si T, X, S_D sont	ie si T, X, s_D sont
14	-3	I.4 INTEGRANT	I.4 INTEGRAND
15	1		$\frac{\pi d^4 q_b}{\pi Q_{j\varepsilon}} = \frac{d^4 q_1 \Lambda \dots}{Q_{1\varepsilon} \Lambda \dots}$
26	-9	= $\lim_{e \rightarrow 0} \text{Lim}$	= $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Lim}$
27	-9	en intégrand	en intégrant
60	+2	$\tau^* E$	$\sigma^* E$
113	+4	arbres variables	arbres les variables
119	-2	$\sigma = 0$	$\sigma \neq 0$
120	+4	$\bar{\Sigma}^1$	$\bar{\Sigma}^1$
	-9	$\underline{k} \cdot \underline{q} = 0$	$\underline{k} \cdot \underline{q} = \rho \sigma$
167	-4, -10	aggrandissement	agrandissement
177	-6	$\cup E_0$	$\cup K_0$
186	+6	$\bar{q} \cdot \bar{q}'_{\mu} = \bar{q} \cdot q'_{\mu} = 0$	$\bar{q} \cdot \bar{q}'_{\mu} = \bar{q}_{\mu} \cdot \bar{q}' = 0$
	-4	rajouter	$\underline{q}^2 = 0$
E8	-1	$S'(t)$ ni $S'(t)$	$\overline{S'(t)}$ ni $\widetilde{S'(t)}$
F10	+10	(S,B) de b ,	(S,B) de G ,

B I B L I O G R A P H I E

- J. LERAY Le calcul différentiel et intégral sur une variété analytique complexe (Pb. de Cauchy III),
Bulletin de la Société Mathématique de France,
87, 1959.
- H. HIRONAKA Résolution of singularities...
Annals of Mathematics 79, 1964.
- R. THOM Les singularités des applications différentiables,
Annales de L'Institut Fourier, 6, 1956.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Vu et approuvé

Orsay, le 15 Janvier 1968

Le Doyen de la Faculté des Sciences

G. POITOU

Vu et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

J. ROCHE

